Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 183

Heft 2

Ausgegeben am 25. Februar 1941

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1941

Band 183. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Denk, Franz, und **Otto Haupt,** Über die Singularitäten reeller Bogen im R_n	69
Suetuna, Zyoiti, Über die sich selbst assoziierten Charaktere der symmetrischen Gruppe	92
Kanold, Hans-Joachim, Untersuchungen über ungerade vollkommene Zahlen	98
Schneider, Theodor, Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale	110

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Schriftleitung unter der Anschrift:
An die Schriftleitung des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Über die Singularitäten reeller Bogen im R_n.

Von *Franz Denk* und *Otto Haupt* in Erlangen.

Einleitung.

0. 1. Vorbemerkung. Im folgenden betrachten wir reelle Bogen $\mathfrak{B}$ (d. h. eindeutige, stetige Streckenbilder) im projektiven R_n, welche keine in einer k-dimensionalen Ebene [1]) ($k < n$) des R_n enthaltene Teilbogen besitzen (vgl. dazu **0.** 2., Zusatz). Ein Bogen kann von „links" (Anfangspunkt) nach „rechts" (Endpunkt) orientiert werden durch Orientierung der Urbildstrecke von links nach rechts; in Zeichen $\widetilde{\mathfrak{B}} = \widetilde{AE}$, wobei A den Anfangspunkt, E den Endpunkt bezeichnet [2]). Durch die Orientierung von $\widetilde{\mathfrak{B}}$ sei auch die eines jeden Teilbogens festgelegt.

Unter der (*linearen*) Ordnung eines Bogens $\mathfrak{B}$ verstehen wir die maximale Mächtigkeit (falls sie existiert) des Durchschnittes von $\mathfrak{B}$ mit einer Hyperebene. Hat jede Hyperebene nur eine endliche Anzahl Punkte mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam (wobei die Anzahlen dieser Punkte kein Maximum zu besitzen brauchen), so heiße $\mathfrak{B}$ von endlicher Ordnung. Die Bogen der niedrigsten überhaupt möglichen Ordnung sind die von n-ter Ordnung; sie sind sogar einfach, d. h. ein-eindeutige stetige Streckenbilder [3]), und werden als Elementarbogen bezeichnet.

Die lineare Ordnung eines Punktes P auf $\mathfrak{B}$ ist das Minimum der Ordnungen aller Umgebungen von P auf $\mathfrak{B}$. Dabei bezeichnen wir als (zweiseitige) nichtorientierte bzw. orientierte *Umgebung* $\mathfrak{U}$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{U}}$ von P auf $\widetilde{\mathfrak{B}}$ jeden (nichtorientierten bzw. orientierten) Teilbogen von $\widetilde{\mathfrak{B}}$, in dessen Inneren P liegt. Eine orientierte *zweiseitige* Umgebung von P, welche den Anfangs- bzw. Endpunkt A' bzw. E' besitzen möge, setzt sich zusamen aus den beiden *einseitigen* orientierten links- bzw. rechtsseitigen Umgebungen

$$\widetilde{\mathfrak{U}}^- = \widetilde{\mathfrak{B}}^- = \widetilde{A'P} \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathfrak{U}}^+ = \widetilde{\mathfrak{B}}^+ = \widetilde{PE'}.$$

Entsprechend der Tatsache, daß $\widetilde{\mathfrak{B}} = \widetilde{\mathfrak{B}}^+ + \widetilde{\mathfrak{B}}^-$, sollen $\widetilde{\mathfrak{B}}^+$ und $\widetilde{\mathfrak{B}}^-$ als *Summanden* von $\widetilde{\mathfrak{B}}$ bezeichnet werden. Bei genügend kleinen $\widetilde{\mathfrak{B}}^+$ und $\widetilde{\mathfrak{B}}^-$ hat dann P die gleiche Ordnung wie $\widetilde{\mathfrak{B}}$ und wie jede, in $\widetilde{\mathfrak{B}}$ enthaltene, zweiseitige Umgebung von P.

---

[1]) Einen k-dimensionalen linearen Teilraum des R_n ($k \leq n$) bezeichnen wir meist als *k-dimensionale Ebene* (im R_n), noch kürzer als Ebene, falls keine Mißverständnisse zu befürchten sind. Entsprechend reden wir später von k-dimensionalen Tangentialschmieg(halb)ebenen usw. Als *Hyperebenen* werden die $(n-1)$-dimensionalen Ebenen bezeichnet.

[2]) Das Zeichen $\sim$ über Buchstaben (paaren) bzw. natürlichen Zahlen soll im folgenden stets andeuten, daß der durch die Buchstaben bezeichnete Bogen *orientiert* bzw. daß die Zahl *signiert*, d. h. mit einem Vorzeichen versehen ist.

[3]) Vgl. z. B. Sauter [2], S. 522 (Schriftenverzeichnis am Schluß der Arbeit.). Weitere Sätze über Elementarbogen vor allem bei Hjelmslev [1]; vgl. ferner Sauter [1] und [2]. Differenzierbarkeitsannahmen über den Bogen sind hierbei nicht erforderlich.

Wir sprechen von einem elementaren Punkt P, wenn alle hinreichend kleinen linksseitigen sowohl als rechtsseitigen Umgebungen von P Elementarbogen sind; es ist also dann eine hinreichend kleine, zweiseitige Umgebung von P auf $\widetilde{\mathfrak{B}}$ (und damit *jede* in ihr enthaltene Umgebung) Summe zweier elementarer Bogen.

Die Ordnung s eines Punktes P auf $\widetilde{\mathfrak{B}}^+ + \widetilde{\mathfrak{B}}^-$ ist mindestens gleich der Ordnung einer (jeden) einseitigen Umgebung und nicht größer als die Summe der Ordnungen einer (jeden) links- und rechtsseitigen Umgebung. Demgemäß liefern die elementaren Punkte Ordnungen s mit $n \leqq s \leqq 2n$.

Zusatz. Hinsichtlich *nicht-elementarer* Punkte sei bemerkt, daß solche mindestens die Ordnung $n + 2$ besitzen müssen [4]) und daß die Existenz nicht-elementarer Punkte *aller* Ordnungen $s \geqq n + 2$ auch sichergestellt ist für $n \leqq 3$ [5]).

0. 2. Fragestellung. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir Summen $\widetilde{\mathfrak{B}} = \widetilde{\mathfrak{B}}^+ + \widetilde{\mathfrak{B}}^-$, deren *Summanden* je *von endlicher Ordnung* sind; den Punkt P, in welchem die beiden Summanden zusammenstoßen, bezeichnen wir abkürzend als (auf der Summe) singulär. Es handelt sich dann um eine Untersuchung im Kleinen, nämlich um die *Frage* [6])

a) *nach einer Mindestordnung, d. h. nach einer unteren Schranke für die Ordnung, eines vorgegebenen singulären Punktes;*

b) *und umgekehrt: Wie müssen die Summanden im singulären Punkte P zusammengesetzt sein, wenn P eine vorgegebene Mindestordnung s besitzen soll?*

Die in a) und b) genannten Mindestordnungen sind dabei $\leqq 2n$ anzunehmen, weil ja die *elementaren* Singularitäten einbegriffen sein sollen und weil für diese die Höchstordnung gleich $2n$ ist. In einer folgenden Mitteilung sollen die elementaren Singularitäten noch besonders untersucht werden (vgl. auch Nr. **0.** 4).

Zusatz. Wir bemerken zu diesen Fragen und ihrer nachstehenden Behandlung noch Folgendes: Nach einer eingangs (Nr. **0.** 1) getroffenen Verabredung sollen die betrachteten Bogen keine in einer mindestens eindimensionalen und höchstens $(n-1)$-dimensionalen Ebene enthaltene Teilbogen besitzen; dadurch sind insbesondere Streckenzüge als Bogen ausgeschlossen, genauer die Paare von, in P zusammenstoßenden derartigen Streckenzügen. Diese Verabredung dient nur zur Vereinfachung der Betrachtungen. Läßt man auch Teilbogen der ausgeschlossenen Art zu, so ist die Ordnung des Bogens zu erklären als die maximale Anzahl der Komponenten des Durchschnittes einer Hyperebene mit dem Bogen [7]). Die ausgeschlossenen Fälle lassen sich hinterher einbeziehen, worauf wir indeß nicht näher eingehen.

Übrigens könnte man, entsprechend dem Standpunkt der „geometria finita“ [7]), die eben erwähnten Paare von Streckenzügen oder auch — wie es dem speziellen Fall von Elementarbogen entspricht — Paare von „monotonen“ Punktfolgen als Ausgangspunkt der Betrachtung wählen [8]); die hierfür erhaltenen Sätze ließen sich dann leicht auf die Bogenpaare ausdehnen. Schließlich sei bemerkt, daß z. B. die nachstehenden Betrachtungen über Inzidenzketten ganz abgesehen von ihrem kombinatorischen Cha-

---

[4]) Vgl. Haupt [1].
[5]) Vgl. Haupt [6].
[6]) Vgl. Haupt [3], S. 188. Diese Fragen sind auch für die Gestaltstheorie von Bedeutung, vgl. Haupt [4], S. 263.
[7]) Vgl. Hjelmslev [2], S. 4 ff.
[8]) Hjelmslev [1].

rakter, keineswegs nur im euklidischen Raume gelten, vielmehr z. B. für gewisse Abhängigkeitsräume, in denen die Dimensionsgleichung (vgl. Nr. **1.** 2)

$$\text{Dim}\,(\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}) + \text{Dim}\,(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}) = \text{Dim}\,(\mathfrak{R}) + \text{Dim}\,(\mathfrak{S})$$

unbeschränkt erfüllt ist [9]).

Anmerkung. Mindestordnungen, welche übrigens mit den von uns nachstehend (Nr. **3.** 3. 2.) gefundenen übereinstimmen, sind unseres Wissens bis jetzt nur für die 2^n *differenzierbaren* (vgl. Nr. **0.** 3. 5.) Punkte und zwar nur für *elementare* Punkte ermittelt (Denk [1], Linsman [1], Scherk [2], Delvendahl [1]). Demgegenüber zeigen unsere Betrachtungen, daß man auch für die differenzierbaren Singularitäten *lediglich endliche Ordnung von* $\mathfrak{B}^+$ *und* $\mathfrak{B}^-$ vorauszusetzen braucht. Auch diese Voraussetzung ließe sich noch abschwächen (vgl. z. B. Nr. **2.** 1.). — In diesem Zusammenhange sei noch erwähnt, daß in den eben genannten Arbeiten, abgesehen von Denk [1], auch die Klasse des singulären Punktes betrachtet bzw. eine Mindestklasse bestimmt wird (vgl. die Einleitung von Delvendahl [1]).

0. 3. Hilfsmittel.

0. 3. 1. *Tangentialschmieg(halb)ebenen.* Eine wesentliche Rolle bei unserer Untersuchung spielen die *einseitigen* und zwar rechts- bzw. linksseitigen k-dimensionalen ($k = 0, 1, \ldots, n$) *Tangentialschmiegebenen* t_k^+ bzw. t_k^- und *Tangentialschmieghalbebenen* th_k^+ bzw. th_k^- im Punkte P an den orientierten Bogen $\widetilde{\mathfrak{B}}$, die wir durch Induktion definieren: *Rechtsseitige* (oder vordere) bzw. *linksseitige* (oder hintere) nulldimensionale Tangentialschmieg(halb)ebene t_0^+ (th_0^+) bzw. t_0^- (th_0^-) im Punkte P an $\widetilde{\mathfrak{B}}$ sei der Punkt P selbst, also $t_0^+ = t_0^- = t_0$, $th_0^+ = th_0^- = t_0$. Es existiere nun für $k \geqq 1$ der rechts- bzw. linksseitige t_{k-1} in P an $\widetilde{\mathfrak{B}}$; konvergiert dann die k-dimensionale Verbindungsebene von t_{k-1}^+ bzw. von t_{k-1}^- mit einem Punkte Q einer rechts- bzw. linksseitigen Umgebung von P auf $\widetilde{\mathfrak{B}}$ für $Q \to P$, so erklären wir die k-dimensionale Limesebene als t_k^+ bzw. als t_k^-.

Solche Umgebungen sind die Summanden $\widetilde{\mathfrak{B}}^- = \widetilde{AP}$, $\widetilde{\mathfrak{B}}^+ = \widetilde{PE}$ von $\widetilde{\mathfrak{B}} = \widetilde{AE}$, wobei also P Anfangs- bzw. Endpunkt von $\widetilde{\mathfrak{B}}^+$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{B}}^-$ ist. Den rechtsseitigen th_k^+ in P definiert man (entsprechend wie den t_k^+) als Limes (falls er existiert) derjenigen, von t_{k-1}^+ begrenzten k-dimensionalen *Halbebenen*, die durch Verbindung von t_{k-1}^+ mit einem Punkte Q auf $\widetilde{\mathfrak{B}}^+$ entstehen und die Q als inneren Punkt enthalten, für $Q \to P$. Entsprechend wird th_k^- so erklärt:

Wir benützen neben den Summanden $\widetilde{\mathfrak{B}}^-$, $\widetilde{\mathfrak{B}}^+$ die (nur in der Orientierung von ihnen verschiedenen) Komponenten

$$\mathfrak{b}^- = -\widetilde{\mathfrak{B}}^- = \widetilde{PA}, \quad \mathfrak{b}^+ = \widetilde{\mathfrak{B}}^+ = \widetilde{PE}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{b}^+ + \mathfrak{b}^-$$

ein. P ist für beide Komponenten zugleich Anfangspunkt. Es ist $t_k^\pm$ ($th_k^\pm$) die rechtsseitige Tangentialschmieg(halb)ebene in P an $\mathfrak{b}^\pm$.

Zusatz. Man erklärt[10]) — mit Rücksicht auf die dadurch sich einfacher gestaltende Definition gewöhnlich differenzierbarer Punkte und auf die bequemere Formulierung gewisser Sätze — als *linksseitigen* Th_k^- vielfach den Limes für $Q \to P$ der von t_{k-1}^- begrenzten k-dimensionalen Halbebenen, welche durch Verbindung von t_{k-1}^- mit einem

---

[9]) Vgl. z. B. Haupt-Nöbeling-Pauc, Über Abhängigkeitsräume, Journ. f. d. r. u. angew. Math. **181** (1939), S. 193ff.

[10]) Im Anschluß an Sauter [1], S. 512. Die endliche Ordnung des Bogens ist hinreichende Bedingung für die Existenz aller Tangentialschmieghalbräume, vgl. z. B. Sauter [1], S. 519.

Punkte $Q \varepsilon \tilde{\mathfrak{B}}^-$ entstehen und die im Falle $k \equiv 0(2)$ bzw. $k \equiv 1(2)$ den Punkt Q als inneren bzw. nicht als inneren Punkt enthalten. Bei der Zusammensetzung zweier Bogen ist allerdings der Unterschied der Definition der Th^- für $k \equiv 0(2)$ und $k \equiv 1(2)$ unbequem. Es gelten nun (in leicht verständlicher Schreibweise) die Beziehungen

$$th_k^- = (-1)^k Th_k^-, \quad th_k^+ = Th_k^+,$$

wobei wir unter $-Th_k^-$ das Komplement der Halbebene Th_k^- bezüglich der T_k^- verstehen. Für die mit T_k^+ und T_k^- zu bezeichnenden Träger dieser Halbebenen gilt natürlich

$$t_k^- = T_k^-, \; t_k^+ = T_k^+.$$

Bei den nachstehenden Überlegungen (§§ 2 und 3) *werden wir ausschließlich* $\mathfrak{b}^+$ *und* $\mathfrak{b}^-$, *sowie die zugehörigen* th_k^+, th_k^- *verwenden.*

0. 3. 2. *Inzidenzketten.* Jede (nach steigenden Dimensionen geordnete) Folge von $n+1$ Ebenen der Dimensionen $0, 1, \ldots, n$, in welcher jeweils die vorhergehende Ebene der nachfolgenden inzident (d. h. in ihr enthalten) ist, bezeichnen wir als Inzidenzkette, in *Zeichen* IK_n; die einzelnen Ebenen bezeichnen wir als ihre Glieder. Besteht die Folge aus *Halb*ebenen (statt aus Ebenen), so bezeichnen wir sie als eine orientierte Inzidenzkette, in *Zeichen* $\tilde{I}K_n$; die einzelnen Halbebenen der Kette heißen wieder ihre (orientierten) Glieder.

Handelt es sich bei den Ebenen bzw. Halbebenen einer IK_n bzw. $\tilde{I}K_n$ um die t_k bzw. th_k (einer Komponente $\mathfrak{b}^+$ oder $\mathfrak{b}^-$) in P, so sprechen wir von einer Schmieginzidenzkette bzw. einer orientierten Schmieginzidenzkette, in *Zeichen* SiK bzw. $\tilde{SiK}$. Sinngemäß unterscheiden wir zwischen *rechts-* und *linksseitigen* SiK, in Zeichen SiK^+, SiK^-, usw.

0. 3. 3. *Schmiegkoordinatensysteme.* Der orientierten rechtsseitigen Schmieginzidenzkette können wir *rechtsseitige* Schmiegkoordinatensysteme mit den positiven Halbachsen $Xh_+^1, \ldots, Xh_+^n$ zuordnen auf folgende Weise: Betrachtet werde z. B. die $\tilde{SiK}^+$. Es werde gewählt: $th_0 = t_0 = P$ als Ursprung und th_1^+ als Halbachse Xh_+^1, ferner als Xh_+^k, $k = 2, 3, \ldots, n$, jene Halbgerade mit dem Anfangspunkt P, welche erhalten wird durch Verbindung von P mit einem beliebig vorgegebenen *inneren* Punkt $U^{(k)}$ von th_k^+ (der also nicht auf t_{k-1}^+ liegt). Von der rechtsseitigen Komponente $\mathfrak{b}^+$ sagen wir, sie befinde sich in bezug auf ein solches rechtsseitiges Schmiegkoordinatensystem (r. Schm.-K.-System) in Normallage.

Wir erhalten entsprechend *linksseitige Schmiegkoordinatensysteme* mit den Halbachsen $Xh_-^1, Xh_-^2, \ldots, Xh_-^n$, wenn wir in der eben ausgesprochenen Definition überall th_k^+ durch th_k^- ersetzen.

0. 3. 4. *Maximalsekanten, r-Sekanten.* Wir bezeichnen als r-Sekante $S_{(r)}$ von $\tilde{\mathfrak{B}}$ oder $\mathfrak{B}$ eine Hyperebene, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{B}$ *mindestens* r verschiedene *Schnitt*punkte $Q^{(\varrho)}$, $\varrho = 1, \ldots, r$, enthält [11]). Das r-tupel $(S_{(r)} \frown \mathfrak{B})$ dieser Schnittpunkte heiße das r-tupel von $S_{(r)}$. Liegen die $Q^{(i)}$ in einseitiger Umgebung von P oder ist P Anfangs- bzw. Endpunkt von $\tilde{\mathfrak{B}}$, so sprechen wir von einer *einseitigen* (rechts- oder linksseitigen) r-Sekante von P. (Man beachte: Soll die Umgebung von P Summe höchstens zweier Bogen n-ter Ordnung sein, so muß gelten: $0 \leqq r \leqq 2n$ bzw. $0 \leqq r \leqq n$.) Besteht der Durchschnitt aus genau r Schnittpunkten, so sprechen wir von einer genauen *r-Sekante*, in Zeichen $gS_{(r)}$.

Wenn wir später von einer *r-Sekantenfolge bezüglich* P sprechen, so meinen wir damit immer eine Folge von r-Sekanten $S_{(r)}^{(\varrho)}$ derart, daß schließlich alle $(S_{(r)}^{(\varrho)} \frown \mathfrak{B})$

[11]) Bezüglich der Unterscheidung zwischen Schnitt- und Stützpunkt vgl. z. B. Sauter [1], S. 511.

in $\mathfrak{U}^{(\tau)}$ enthalten sind (d. h. für alle ϱ mit $\varrho > N(\tau)$), wobei $\mathfrak{U}^{(\tau)}$, $\tau = 1, 2, \ldots$, eine Folge von Umgebungen bilden soll, die sich auf P zusammenziehen. Ist jede $S_{(\tau)}^{(\varrho)}$ der Folge genau, so heißt auch die ganze *Folge* genau. Entsprechend sind die Bezeichnungen *rechtsseitige*, *linksseitige*, *zweiseitige* r-Sekantenfolge *bezüglich* P zu verstehen.

0. 3. 5. *Differenzierbare und nichtdifferenzierbare Punkte und Bogen.* Auf den von uns betrachteten Bogen haben wir zweierlei Punkte zu unterscheiden: *Erstens* Punkte, in denen für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ die t_k^- mit den t_k^+ übereinstimmen; solche Punkte nennen wir differenzierbare Punkte. *Zweitens* Punkte, in denen diese Übereinstimmung nicht für alle k stattfindet; solche Punkte nennen wir nichtdifferenzierbar. Wir bezeichnen einen Bogen als differenzierbar, wenn alle seine Punkte differenzierbar sind, im anderen Falle als nichtdifferenzierbar. (Die Anzahl der nichtdifferenzierbaren Punkte eines nichtdifferenzierbaren *Elementar*bogens ist höchstens abzählbar [12].) *Hinsichtlich der Differenzierbarkeit* von $\mathfrak{B}$ in den *beiderseitigen Umgebungen eines singulären* (sei es differenzierbaren, sei es nicht-differenzierbaren) *Punktes* P machen wir *keinerlei Annahmen*.

0. 4. **Gedankengang der Untersuchung.** Wir werden zunächst (in § 1) „Zusammensetzungstypen" für $\mathfrak{B} = \mathfrak{b}^+ + \mathfrak{b}^-$ (vgl. Nr. **1.** 7) definieren, die natürlich projektiv invariant sind. Und zwar wird jeder Zusammensetzungstypus gekennzeichnet werden durch eine Permutation der mit Vorzeichen versehenen Zahlen $1, \ldots, n$; sogen. *signierte Permutation*. Sodann konstruieren wir (§§ 2 u. 3) zu jedem Zusammensetzungstyp eine natürliche Zahl r mit $r \leqq 2n$, zu welcher es zweiseitige r-Sekantenfolgen bezüglich des betrachteten Punktes P gibt; dies gelingt mit Hilfe einer hinreichenden Bedingung für r-Sekantenfolgen, in welchen jede Ebene mindestens r Schnittpunkte mit der Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ besitzt. Auf diese Weise gelingt es (§ 3) zu jedem Punkt P von bekannter „Zusammensetzung" (d. h. zu jedem vorgegebenen Typus) eine „*Mindestordnung*" d. h. eine untere Schranke für die Ordnung von P anzugeben.

Einer zweiten Mitteilung bleibe die Untersuchung vorbehalten, ob es Singularitäten P gibt, für welche mit dieser Mindestordnung bereits die genaue Ordnung ermittelt ist [13]), für welche also die von uns (in §§ 2, 3) gefundene Zahl r nicht vergrößert werden kann und für welche überdies die konstruierten r-Sekantenfolgen sogar genaue r-Sekantenfolgen sind. Hierzu wird es übrigens einer noch eingehenderen Untersuchung des allgemeinen Bogens n-ter Ordnung bedürfen, als wir sie in der vorliegenden ersten Mitteilung nötig haben.

0. 5. **Verallgemeinerungen.** Abschließend heben wir noch folgendes hervor: Mit den entwickelten Methoden läßt sich auch der allgemeinere Fall behandeln, in welchem q Bogen (endlicher Ordnung) des R_n im gleichen Punkte zusammenstoßen ($q \geqq 3$). Der Zusammensetzungstypus würde dann durch eine gewisse Anzahl signierter Permutationen gekennzeichnet werden. Die Bestimmung einer Mindestordnung würde entsprechend wie in § 2 erfolgen.

Eine anschließende Frage, die wir aber hier nicht weiter verfolgen, bezieht sich auf den Fall, daß der betrachtete Bogen in einen anderen Raum (als den R_n) eingebettet ist oder wenigstens in bezug auf eine andere Ordnung [14]) untersucht wird. Auch gehen

---

[12]) Vgl. Hjelmslev [1] sowie Sauter [2], Einl. S. 581. Nennt man einen Punkt *gewöhnlich differenzierbar*, wenn in ihm $Th_k^- = Th_k^+$ für $k = 1, \ldots, n-1$, so gilt sogar, daß alle Punkte eines Elementarbogens bis auf abzählbar viele Ausnahmen gewöhnlich differenzierbar sind, vgl. a. a. O. sowie Haupt [8].

[13]) Für den Fall differenzierbarer Punkte mit entsprechend oft differenzierbaren Summanden (Nr. **0.** 1) ist die genaue Ordnung bereits angegeben bei Denk [1].

[14]) Vgl. z. B. die in Haupt [2] behandelten Ordnungsbegriffe.

wir nicht auf die entsprechenden Fragen nach den ordnungssingulären Punkten [15]) bei mehrdimensionalen Gebilden [16]) ein.

Unsere Betrachtungen stehen schließlich in einem gewissen Zusammenhange mit der Descartesschen Regel und Verallgemeinerungen von ihr [17]). Wir behalten uns vor, darauf an anderer Stelle zurückzukommen.

§ 1. Typen der singulären Punkte.

1. 0. Es seien zwei reelle Bogen $\mathfrak{b}^-$ und $\mathfrak{b}^+$ von endlicher Ordnung als Komponenten in einem Punkte P zu einer (orientierten) Bogensumme $\widetilde{\mathfrak{B}}$ zusammengesetzt. Es soll zunächst ein vollständiges System von Typen der Zusammensetzung von $\mathfrak{b}^-$ und $\mathfrak{b}^+$ im Punkt P festgelegt werden. Dabei handelt es sich in bekannter Weise um eine Einteilung der $\mathfrak{b}^- + \mathfrak{b}^+$ in Klassen zusammensetzungsäquivalenter Summen [18]). Eine solche Klasseneinteilung werden wir schon erhalten durch Aufstellung von *Typen* lediglich *für die gegenseitige Lage der beiden orientierten Schmieginzidenzketten* ($\tilde{SiK}$, vgl. Nr. **0.** 3. 2), welche von den *im betrachteten Punkte* zusammenstoßenden Bogen (Komponenten) geliefert werden und zwar werden wir den beiden $\tilde{SiK}$ in eindeutiger Weise eine Permutation der Zahlen $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ zuordnen und auf diese Zuordnung die Typeneinteilung für die gegenseitige Lage zweier $\tilde{SiK}$ gründen. Bei den hiermit angedeuteten Betrachtungen spielen also nur die $\tilde{SiK}$ eine Rolle, nicht die Bogensummen selbst, welche völlig außer Betracht bleiben.

1. 1. Die dem singulären Punkte P durch seine Komponenten zugeordneten (orientierten) Schmieginzidenzketten. Sie sind:

$$\tilde{SiK}^- : th_0^- = P,\ th_1^-, \ldots, th_n^-;$$
$$\tilde{SiK}^+ : th_0^+ = P,\ th_1^+, \ldots, th_n^+.$$

Gemeinsames Glied beider Ketten ist $th_0^{\mp} = P$ = nulldimensionaler Durchschnitt aller Halbräume; außerdem besitzen th_n^- und th_n^+ den R_n als gemeinsamen Träger (sie sind möglicherweise sogar identisch).

Die beiden nicht orientierten, dem Punkt P zugeordneten Ketten sind:

$$SiK^- : t_0^- = P,\ t_1^-, \ldots, t_n^- = R_n;$$
$$SiK^+ : t_0^+ = P,\ t_1^+, \ldots t_n^+ = R_n.$$

1. 2. Schnitt einer (beliebigen) Ebene mit den Gliedern einer (nichtorientierten) Inzidenzkette. Unter der Verbindung oder der linearen Hülle zweier Ebenen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{T}$, in Zeichen $L(\mathfrak{R}, \mathfrak{T})$ oder $(\mathfrak{R} \cup \mathfrak{T})$ verstehen wir die Ebene niedrigster Dimension, in welcher die beiden genannten Ebenen enthalten sind; entsprechend verstehen wir unter ihrem Schnitt $(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{T})$ die Ebene maximaler Dimension, welche sowohl in $\mathfrak{R}$ als in $\mathfrak{T}$ enthalten und welche gleich dem mengentheoretischen Durchschnitt von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{T}$ ist. Für $\mathfrak{T} = t_k$ bzw $\mathfrak{T} = t_{k-1}$ gilt nun die Dimensionsgleichung [19])

$$\mathrm{Dim}(\mathfrak{R}) + \mathrm{Dim}(t_k) = \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cup t_k) + \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cap t_k)$$
$$\mathrm{Dim}(\mathfrak{R}) + \mathrm{Dim}(t_{k-1}) = \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cup t_{k-1}) + \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cap t_{k-1}),$$

---

[15]) Vgl. Haupt [7], S. 253, Nr. 1. 1.
[16]) Vgl. Haupt [5], § 2.
[17]) Vgl. Polya-Szegö [1], S. 52—53, Aufgaben 87—90; Vahlen [1].
[18]) Vgl. z. B. Haupt, Einführung in die Algebra, Leipzig 1929, Nr. 1. 1.
[19]) Vgl. z. B. P. H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie, 1. Teil, Leipzig 1902, S. 14.

wobei $\mathrm{Dim}(\mathfrak{Q})$ die Dimension der Ebene $\mathfrak{Q}$ bedeutet und wobei $\mathrm{Dim}(\mathfrak{Q}) = -1$, wenn $\mathfrak{Q}$ leer ist. Wegen $\mathrm{Dim}(t_k) = \mathrm{Dim}(t_{k-1}) + 1$ folgt

$$\mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cup t_k) - \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cup t_{k-1}) = \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cap t_{k-1}) - \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cap t_k) + 1.$$

Wegen $t_{k-1} < t_k$ ist aber $(\mathfrak{R} \cup t_{k-1}) < (\mathfrak{R} \cup t_k)$ und $(\mathfrak{R} \cap t_{k-1}) < (\mathfrak{R} \cap t_k)$; daher

$$0 \leqq \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cup t_k) - \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cup t_{k-1}) = \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cap t_{k-1}) - \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cap t_k) + 1,$$

woraus noch $0 \leqq \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cap t_k) - \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cap t_{k-1}) \leqq 1$ folgt. Weil nun zwei Ebenen, von denen die eine in der anderen enthalten ist, dann und nur dann gleiche Dimension besitzen, falls sie identisch sind, so folgt

1. 2. 1. Satz. *Für die Verbindungen bzw. die Schnitte einer beliebigen Ebene $\mathfrak{R}$ mit zwei aufeinander folgenden Gliedern einer Inzidenzkette gibt es nur die beiden Möglichkeiten, daß entweder die Verbindungen oder die Schnitte identisch sind, genauer daß entweder*

$$(\mathfrak{R} \cup t_k) \equiv (\mathfrak{R} \cup t_{k-1}) \text{ und } \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cap t_k) - \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cap t_{k-1}) = 1,$$

oder

$$\mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cup t_k) - \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cup t_{k-1}) = 1 \text{ und } (\mathfrak{R} \cap t_k) \equiv (\mathfrak{R} \cap t_{k-1}).$$

1. 2. 2. Ist $z = \mathrm{Dim}(\mathfrak{R})$, so setzen wir $(z; k) = \mathrm{Dim}(\mathfrak{R} \cap t_k)$ und bezeichnen $(z; k)$ als Schnittdimension. Es ist i. a. $(z; k) \neq (k; z)$. Es gilt $(z; n) = z$, ferner ist $(z; 0) = 0$, falls $\mathfrak{R}$ den (Nullpunkt) P enthält; schließlich ist $(z; k) - (z; k-1)$ entweder $= 1$ oder $= 0$.

1. 3. Schnitt der Glieder von SiK^+ mit denen von SiK^-. Die (i; k)-Matrix.

1. 3. 1. Wir wollen die Dimensionen der $(n+1)^2$ möglichen Schnitte der Glieder t_i^+, $i = 0, 1, \ldots, n$, einer SiK^+ mit den Gliedern t_k^-, $k = 0, 1, \ldots, n$, einer SiK^- in einer quadratischen Matrix, sogen. $(i; k)$-Matrix, anordnen [20]), deren Zeilen bzw. Spalten wir die Nummern $0, 1, \ldots, n$ zuteilen, und worin im Schnittpunkt der i-ten Zeile und der k-ten Spalte die Schnittdimension $(i; k) = \mathrm{Dim}(t_i^+ \cap t_k^-)$ eingetragen sei. (Bei der Bezeichnung $(i; k)$ steht die Nummer der *Zeile vor*, die Nummer der *Spalte hinter* dem Strichpunkt.)

Da unsere SiK^+ und SiK^- im nulldimensionalen Glied $t_0^{\mp} = P$ und im n-dimensionalen Glied $t_n^{\mp} = R_n$ übereinstimmen, so folgt $(0; k) = (i; 0) = 0$ sowie $(n; k) = k$, $(i; n) = i$, für alle $i, k = 0, 1, \ldots, n$. Die nullte Zeile und die nullte Spalte der $(i; k)$-Matrix enthalten also nur Nullen; die n-te Zeile bzw. n-te Spalte dagegen sind, von links nach rechts bzw. von oben nach unten durchlaufen, einfach $0, 1, \ldots, n$. Ferner kommen (zufolge Nr. **1. 2. 1**) in der i-ten Zeile bzw. in der k-ten Spalte ($1 \leqq i \leqq n-1$, $1 \leqq k \leqq n-1$) alle Zahlen $0, 1, \ldots, i$ bzw. $0, 1, \ldots, k$ vor — natürlich mit Wiederholungen.

1. 3. 2. Wir betrachten jetzt die $(i; k)$-Matrix etwas näher. Wir bezeichnen *bei gegebenem i mit σ_i die kleinste unter den Zahlen $k = 0, \ldots, n$, für welche die Durchschnitte $(t_i^+ \cap t_k^-)$ und $(t_{i-1}^+ \cap t_k^-)$ nicht zusammenfallen.* Oder, was dasselbe ist (vgl. Nr. **1. 2. 1**):

Bei gegebener Zeilennummer i in der $(i; k)$-Matrix sei σ_i die niedrigste Spaltennummer k, für welche die Schnittdimension $(i; k)$ nicht mit der in der gleichen Spalte unmittelbar darüberstehenden $(i-1; k)$ übereinstimmt, so daß also $(i; k) - (i-1; k) = 1$ ist.

Satz. Für ein gegebenes i, mit $1 \leqq i \leqq n$, ist die Differenz

$$\mathrm{Dim}(t_i^+ \cap t_k^-) - \mathrm{Dim}(t_{i-1}^+ \cap t_k^-) = 0 \text{ bzw. } = 1,$$

je nachdem $0 \leqq k < \sigma_i$ bzw. $\sigma_i \leqq k \leqq n$. Oder was dasselbe ist:

---

[20]) Im Hinblick auf die in Nr. **1. 2. 1** angegebenen Beziehungen könnte man statt dessen auch mit der Matrix der $\mathrm{Dim}(t_i^- \cup t_k^+)$, d. h. der Dimensionen der *Verbindungsräume* operieren.

Man erhält in der $(i; k)$-Matrix die Zahlen der i-ten Zeile aus den Zahlen der $(i-1)$-ten Zeile, indem man diejenigen Zahlen der letzteren beibehält bzw. um 1 erhöht, welche zu einer Spalte der Nummer k gehören mit $0 \leqq k < \sigma_i$ bzw. $\sigma_i \leqq k \leqq n$.

Bemerkung. Insbesondere ist $(i; \sigma_i) - (i-1; \sigma_i) = 1$ und

$$(i; \sigma_i - 1) - (i-1; \sigma_i - 1) = 0.$$

Beweis. a) Für $0 \leqq k < \sigma_i$ folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition der Zahlen σ_i. — b) Wir müssen daher lediglich zeigen, daß $(i; k) - (i-1; k) = 1$ für alle k mit $\sigma_i \leqq k$. Wegen $t_{i-1}^+ < t_i^+$ können wir aber setzen: $t_i^+ = t_{i-1}^+ + \Sigma_i$ mit leerem $(t_{i-1}^+ \frown \Sigma_i)$, so daß $(t_i^+ \frown t_k^-) = (t_{i-1}^+ \frown t_k^-) + (\Sigma_i \frown t_k^-) = \mathfrak{A}_k' + \mathfrak{B}_k'$, wobei $\mathfrak{A}_k'$ und $\mathfrak{B}_k'$ fremd sind $(k = \sigma_i, \ldots, n)$. Und es ist $\mathfrak{B}_{\sigma_i}'$ nicht leer, weil sonst $(t_i^+ \frown t_{\sigma_i}^-) = (t_{i-1}^+ \frown t_{\sigma_i}^-)$, entgegen der Definition von σ_i. Für $k > \sigma_i$ ist wegen $t_{\sigma_i}^- < t_k^-$ auch $\mathfrak{B}_{\sigma_i}' < \mathfrak{B}_k'$; somit ist $\mathfrak{B}_k'$ nicht leer, da sein Teil $\mathfrak{B}_{\sigma_i}'$ nicht leer ist. Aus Nr. **1.** 2. 1 folgt daher, daß $(i; k) - (i-1; k) = 1$ für $\sigma_i \leqq k$.

1. 3. 3. In Nr. **1.** 3. 2 wurden die Schnitte einer Ebene t_i^+ mit den Gliedern t_k^-, $k = 0, 1, \ldots, n$, einer SiK^- betrachtet. Wir können ebenso die Schnitte einer t_k^- mit den Gliedern t_i^+, $i = 0, 1, \ldots, n$, einer SiK^+ ins Auge fassen und gelangen dann zu Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, *wobei ζ_k die kleinste der Zahlen $i = 0, \ldots, n$ ist, für welche in der $(i; k)$-Matrix bei gegebener Spaltennummer k die* $\dim(t_i^+ \frown t_k^-) = (i; k)$ *nicht mit $(i; k-1)$ übereinstimmt, d. h. mit der in der gleichen Zeile unmittelbar vorangehenden Zahl, für welche also $(i; k) - (i; k-1) = 1$ ist.*

Anstelle des Satzes der Nr. **1.** 3. 2 tritt dann:

Man erhält in der $(i; k)$-Matrix die Zahlen der k-ten Spalte aus den Zahlen der $(k-1)$-ten Spalte, indem man alle Zahlen der letzteren beibehält bzw. um 1 erhöht, sofern sie zu einer Zeile mit der Nummer i gehören, für die $0 \leqq i < \zeta_k$ bzw. $\zeta_k \leqq i \leqq n$.

Bemerkung. Insbesondere ist $(\zeta_k; k) - (\zeta_k; k-1) = 1$ und

$$(\zeta_k - 1; k) - (\zeta_k - 1;\ k-1) = 0.$$

Zur Abkürzung bezeichnen wir die σ_i bzw. ζ_k als die *links-* bzw. *rechtsseitigen* Minimalindizes.

1. 4. Zusammenhang zwischen den Minimalindizes.

1. 4. 1. Die (geordneten) n-tupel $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ und $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ bilden je eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$. Um das einzusehen, betrachten wir die Differenzen

$$D(i; \alpha) = (i; \alpha) - (i-1; \alpha).$$

Zufolge Nr. **1.** 3. 2. gilt $D(i; \alpha - 1) = 0$, $D(i; \alpha) = 0$ für $\alpha < \sigma_i$; $D(i; \alpha - 1) = 0$, $D(i; \alpha) = 1$ für $\alpha = \sigma_i$; $D(i; \alpha - 1) = 1$, $D(i; \alpha) = 1$ für $\alpha > \sigma_i$. Mithin ist für $i = 1, \ldots, n$:

(A) $$D(i; \alpha) - D(i; \alpha - 1) = 1 \text{ für } \alpha = \sigma_i$$
$$= 0 \text{ für } \alpha \neq \sigma_i.$$

Ebenso ergibt sich (wegen Nr. **1.** 3. 3) für $d(i; \alpha) = (i; \alpha) - (i; \alpha - 1)$, $i, \alpha = 1, \ldots, n$:

(B) $$d(i; \alpha) - d(i-1; \alpha) = 1 \text{ für } i = \zeta_\alpha$$
$$= 0 \text{ für } i \neq \zeta_\alpha.$$

Es gilt aber für jedes i und jedes α:

(C) $$D(i; \alpha) - D(i; \alpha - 1) = d(i; \alpha) - d(i-1; \alpha).$$

Ist daher die linke Seite von (C) gleich 1, so auch die rechte und umgekehrt, d. h.

(D) $$\sigma_i = \alpha \textit{ dann und nur dann, wenn } i = \zeta_\alpha.$$

Nun ist aber (nach Definition von ζ_α) *jedem* $\alpha = 1, \ldots, n$ eindeutig ein ζ_α, also ein $i = \zeta_\alpha$ zugeordnet; wegen (D) gibt es daher mindestens n verschiedene σ_i, also genau n, weil definitionsgemäß $1 \leqq \sigma_i \leqq n$. Folglich bilden die $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ eine Permutation von $1, \ldots, n$. Und genau entsprechendes gilt für $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Wegen (D) sind aber beide Permutationen zueinander reziprok. Zusammengefaßt:

Satz. *Durch ein (beliebig) vorgegebenes geordnetes Paar von SiK ist eindeutig bestimmt das (geordnete) n-tupel der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Minimalindizes σ_i bzw. ζ_k. Jedes dieser n-tupel liefert eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$. Beide Permutationen sind zueinander reziprok; es ist also $\sigma_{(\zeta_k)} = k$, $\zeta_{(\sigma_i)} = i$, für $i, k = 1, \ldots, n$.*

Wir wollen $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ bzw. $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ als die zugehörige (d. h. zum geordneten Paare der *SiK* gehörigen) *links- bzw. rechtsseitige* Permutation bezeichnen.

1. 4. 2. Gemäß Nr. **1.** 3. 2 und Nr. **1.** 3. 3, Bemerkung, ist für alle i, k

$$(i; \sigma_i) - (i-1; \sigma_i) = 1; \quad (\zeta_k; k) - (\zeta_k; k-1) = 1.$$

Wählen wir nun $\zeta_k = i$, so wird $k = \sigma_i$ und die zweite Gleichung geht über in $(i; \sigma_i) - (i; \sigma_i - 1) = 1$ für jedes $i = 1, \ldots, n$. Da schließlich $(i-1; \sigma_i - 1) = (i; \sigma_i - 1)$ (gemäß Nr. **1.** 3. 2, Bemerkung), so ergibt sich

$$(i-1; \sigma_i - 1) = (i-1; \sigma_i) = (i; \sigma_i - 1).$$

Da je zwei aufeinanderfolgende dieser Schnittdimensionen sich auf Schnitte einer Ebene mit zwei aufeinanderfolgenden Gliedern je einer Inzidenzkette beziehen, so folgt aus der Gleichheit der Schnittdimensionen die der Schnitte selber (Nr. **1.** 2). Also

Satz. $(t^+_{i-1} \frown t^-_{\sigma_i}) = (t^+_i \frown t^-_{\sigma_i - 1}) = (t^+_{i-1} \frown t^-_{\sigma_i - 1})$.

Anmerkung. Wir erwähnen noch folgende Darstellung der $(i; k)$-Matrix als Summe von n Matrizen, deren Elemente sämtlich Null oder Eins sind. Für jedes $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ sei die Funktion $\theta_\alpha(i, k)$ mit dem Definitionsbereich $0 \leqq i \leqq n$, $0 \leqq k \leqq n$ folgendermaßen erklärt: $\theta_\alpha(i, k) = 1$ für alle i, k mit $\zeta_\alpha \leqq i \leqq n$, $\alpha \leqq k$, wo ζ_α wieder der Minimalindex ist; $\theta_\alpha(i, k) = 0$ für alle übrigen i, k.

Behauptung. I) $\theta_\alpha(i, k) = D(\zeta_\alpha; k) \cdot d(i; \alpha)$

II) $(i; k) = \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_\alpha(i, k)$.

Beweis. Zu I): Folgt aus der Definition von D und d (vgl. Nr. **1.** 4. 1), wenn in $D(i; \alpha)$ statt i bzw. α gesetzt werden ζ_α bzw. k und wenn $\sigma_{(\zeta_\alpha)} = \alpha$ beachtet wird. — Zu II): Bei festem k ist $\theta_\alpha = 0$ für alle $\alpha > k$, ferner ist $D(\zeta_\alpha; k) = 1$ für $\alpha \leqq k$ (vgl. I)), also $\theta_\alpha(i, k) = d(i, \alpha) = (i, \alpha) - (i, \alpha - 1)$. Somit

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \theta_\alpha(i, k) = \sum_{\alpha=1}^{k} ((i; \alpha) - (i, \alpha - 1)) = (i; k) - (i; 0) = (i; k), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Man entnimmt daraus noch, daß *die $(i; k)$-Matrix durch eine der zugehörigen Permutationen eindeutig bestimmt ist (und umgekehrt).*

1. 5. Signierte Permutation.

Zur Aufstellung von Zusammensetzungstypen (vgl. Nr. **1.** 0) werden wir uns solcher, etwa rechtsseitiger Schmiegkoordinatensysteme bedienen, deren jedes durch geeignete Vertauschung und Umorientierung der Achsen des Systems in ein linksseitiges Schmiegkoordinatensystem übergeht. Zur Bestimmung solcher Systeme, die wir als *vermittelnde Schmiegkoordinatensysteme* bezeichnen werden (vgl. Nr. **1.** 6), dienen folgende Feststellungen.

1. 5. 1. Wir behaupten zunächst:

Es gibt Punkte U^i, $i = 1, \ldots, n$, derart, daß gleichzeitig [21])

$$U^i \varepsilon t^+_i, \; U^i \notin t^+_{i-1} \quad \text{und} \quad U^i \varepsilon t^-_{\sigma_i}, \; U^i \notin t^-_{\sigma_i - 1}.$$

[21]) Das Zeichen $a \notin b$ soll bedeuten: a nicht enthalten in b.

Kennzeichnend für diese U^i ist: U^i liegt in $\mathfrak{R}^{(i)}$, aber nicht in $\mathfrak{R}^{(i-1)}$, wobei

$$\mathfrak{R}^{(i)} = (t_i^+ \frown t_{\sigma_i}^-),\ \mathfrak{R}^{(i-1)} = (t_i^+ \frown t_{\sigma_i-1}^-) = (t_{i-1}^+ \frown t_{\sigma_i}^-) \quad [22].$$

Zusatz. Setzt man $\sigma_i = k$, also $i = \zeta_k$, so erhält die Definition der U^i folgende Gestalt:

$$U^i \varepsilon t_i^+,\ U^i \notin t_{i-1}^+ \text{ und } U^{\zeta_k} \varepsilon t_k^-,\ U^{\zeta_k} \notin t_{k-1}^-, \qquad i, k = 1, \ldots, n.$$

Beweis. Zufolge Definition von σ_i ist Dim $(\mathfrak{R}^{(i)})$ = Dim $(\mathfrak{R}^{(i-1)}) + 1$. Folglich ist $\mathfrak{R}^{(i)}$ nicht leer und gibt es Punkte, die in $\mathfrak{R}^{(i)}$, aber nicht in $\mathfrak{R}^{(i-1)}$, die also in t_i^+ und $t_{\sigma_i}^-$, aber nicht in t_{i-1}^+ und nicht in $t_{\sigma_i-1}^-$ enthalten sind. Umgekehrt liegt jeder Punkt der letzteren Art in $\mathfrak{R}^{(i)}$, aber nicht in $\mathfrak{R}^{(i-1)}$, w. z. b. w.

1. 5. 2. Wir betrachten jetzt die Verbindungsgerade X^ν des Anfangspunktes P mit U^ν, $\nu = 1, \ldots, n$. Dann gilt (zufolge Nr. **1.** 5. 1, Zusatz)

$$t_i^+ = L(X^1, X^2, \ldots, X^i),\quad t_k^- = L(X^{\zeta_1}, X^{\zeta_2}, \ldots, X^{\zeta_k}), \qquad i, k = 1, \ldots, n,$$

wobei $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ wieder die zugehörige rechtsseitige Permutation ist (Nr. **1.** 4. 1). Aus der Definition der U^ν (vgl. Nr. **1.** 5. 1, auch Zusatz) folgt nun zunächst:

Man erhält ein rechts- bzw. linksseitiges Schmiegkoordinatensystem (Schm.-K.-Syst.) *im Sinne von Nr.* **0.** 3. 3, *wenn man auf X^i bzw. X^{ζ_k} als positive Halbachse Xh_+^i bzw. Xh_-^k diejenige Halbgerade* [23]) *auszeichnet, welche in der Halbebene th_i^+ bzw. th_k^- liegt.* Es gilt daher

$$\text{(I)} \qquad th_i^+ = \widetilde{L}(X^1, \ldots, X^{i-1}, Xh_+^i), \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\text{(II)} \qquad th_k^- = \widetilde{L}(X^{\zeta_1}, \ldots, X^{\zeta_k - 1}, Xh_-^k), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

wobei $\widetilde{L}(\ \ldots\ )$ die von den in den Klammern auftretenden Geraden und Halbgeraden aufgespannte Halbebene bezeichnen soll. Man beachte, daß man *aus* $X^1, \ldots, X^n$ *gleichzeitig* sowohl ein *rechts-* als ein *links*seitiges Schm.-K.-System erhält.

Es leuchtet ein, daß — je nach der Lage der zu Grunde gelegten beiden orientierten Inzidenzketten — die auf der gleichen Geraden X^i liegenden Xh_+^i und $Xh_-^{\sigma_i}$ identisch oder komplementär (bezüglich X^i) sein können. Unsere Aufgabe muß es nun sein, diese Fallunterscheidung mit Hilfe der zugehörigen Permutation zu kennzeichnen. Dies gelingt wie wir sogleich sehen werden (Nr. **1.** 5. 3) dadurch, daß wir die Elemente unserer Permutation noch mit Vorzeichen versehen, daß wir — wie wir sagen werden — zu signierten Permutationen übergehen.

1. 5. 3. Der eben gemachten Andeutung entsprechend ordnen wir also dem Minimalindex σ_i das positive oder negative Vorzeichen zu, je nachdem Xh_+^i und $Xh_-^{\sigma_i}$ identisch oder komplementär (bezüglich X^i) sind. Wegen $Xh_+^{\zeta_k} = Xh_+^i$, wenn $k = \sigma_i$, wenn also $Xh_-^k = Xh_-^{\sigma_i}$, haben wir folgerichtig dem ζ_k das positive oder negative Vorzeichen zuzuordnen, je nachdem dies für σ_i der Fall ist.

Um die hiermit getroffenen Festsetzungen übersichtlich zu fassen, wollen wir abkürzend einen mit Vorzeichen versehenen Index m als signierten Index $\widetilde{m}$ bezeichnen und eine Permutation mit solchen signierten Indizes (als Elementen) als eine signierte Permutation, in Zeichen $(\widetilde{m}) = (\widetilde{m}_1, \ldots, \widetilde{m}_n)$. In dieser Ausdrucksweise besagt unsere obige Festsetzung bezüglich der Vorzeichen für die σ_i und ζ_k, daß wir unserem geordneten Paar von *SiK eindeutig* ein geordnetes Paar signierter Permutationen

$$(\tilde{\sigma}) = (\tilde{\sigma}_1 \ldots \tilde{\sigma}_n) \quad \text{und} \quad (\tilde{\zeta}) = (\tilde{\zeta}_1 \ldots \tilde{\zeta}_n)$$

(aus den Elementen $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$) zuordnen, die wir als die zugehörige *links- bzw. rechtsseitige* signierte Permutation bezeichnen. Wir erhalten sie aus den zuge-

---

[22]) Wegen $(t_i^+ \frown t_{\sigma_i-1}^-) = (t_{i-1}^+ \frown t_{\sigma_i}^-)$ vgl. Nr. **1.** 4. 2.

[23]) Gemäß der Definition von U^i ist der Durchschnitt von X^i mit der offenen Halbebene th_i^+ nicht leer.

hörigen Permutationen (vgl. Nr. **1.** 4. 1), indem wir deren Elemente, die *Minimalindizes* σ_i und ζ_k, gemäß folgender Vorschrift in *signierte* Indizes $\tilde{\sigma}_i$, $\tilde{\zeta}_k$ *überführen*: $\tilde{\sigma}_i$ und $\tilde{\zeta}_k$ mit $i = \zeta_k$ sollen *immer das gleiche Vorzeichen besitzen* und zwar *das positive bzw. das negative*, je nachdem Xh^i_+ *und* Xh^k_- *identisch bzw. komplementär* sind.

Zwecks einfacher Beschreibung des Zusammenhanges zwischen $(\tilde{\sigma})$ und $(\tilde{\zeta})$ erklären wir als signierte Reziproke $(\tilde{\mu})^{-1}$ von $(\tilde{\mu})$ diejenige signierte Permutation $(\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_n)$, für welche erstens die (nicht-signierten) Permutationen $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ und $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ zueinander reziprok sind, also $\alpha = \tau_i$ ist, wenn $i = \mu_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$, und zweitens sign $\tilde{\mu}_\alpha =$ sign $\tilde{\tau}_i$ für $i = \mu_\alpha$.

Aus $(\tilde{\tau}) = (\tilde{\mu})^{-1}$ folgt ersichtlich $(\tilde{\mu}) = (\tilde{\tau})^{-1}$. Man darf also von *zueinander reziproken* signierten Permutationen sprechen. Aus dem oben über $(\tilde{\sigma})$ und $(\tilde{\zeta})$ Bemerkten folgt nun

Satz. *Die zugehörige rechts- und linksseitige signierte Permutation sind zueinander reziprok.*

Setzen wir noch $Xh^k = Xh^k_+$, $Xh^{\tilde{\zeta}k} = Xh^k_-$, $k = 1, \ldots, n$, *so fallen* $Xh^{\zeta k}$ *und* $Xh^{\tilde{\zeta}}$ *zusammen oder sie sind komplementär, je nachdem* $\tilde{\zeta}_k > 0$ *oder* $\tilde{\zeta}_k < 0$ *ist.* Und das von uns betrachtete *rechts- bzw. linksseitige Schmiegkoordinatensystem wird gebildet von den (Halb-) Achsen* $Xh^1, \ldots, Xh^n$ *bzw.* $Xh^{\tilde{\zeta}_1}, \ldots, Xh^{\tilde{\zeta}_n}$.

1. 5. 4. Zwecks gelegentlicher Anwendung wollen wir noch das Produkt zweier *signierter Permutationen* $(\tilde{\alpha}) = (\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n)$ und $(\tilde{\beta}) = (\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_n)$ definieren. Wir erklären $(\tilde{\alpha})(\tilde{\beta}) = (\tilde{\gamma}) = (\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n)$ so: Es soll die nicht-signierte Permutation $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ gleich dem Produkt (im üblichen Sinne) der nicht signierten Permutationen (α) und (β) sein; und ferner soll dem $\gamma_\nu = \beta_{(\alpha_\nu)}$ positives oder negatives Vorzeichen erteilt werden, je nachdem $\tilde{\beta}_{(\alpha_\nu)} \cdot \alpha_\nu > 0$ oder < 0 ist.

1. 6. **Vermittelnde rechtsseitige signierte Permutation und vermittelnde Schmiegkoordinatensysteme.** Die in Nr. **1.** 5. 2 konstruierten *rechts*seitigen Schmiegkoordinatensysteme lassen sich auch kennzeichnen als geordnete n-Tupel von Halbgeraden (Halbachsen), welche (vom Anfangspunkt P ausgehen und) folgenden Folgerungen genügen: Die besagten Halbgeraden sollen, in ihrer vorgeschriebenen Reihenfolge genommen, ein rechtsseitiges Schmiegkoordinatensystem (Schm.-K.-System im Sinne von Nr. **0.** 3. 3) liefern und es soll eine signierte Permutation $(\tilde{y})$ existieren derart, daß sich aus den Halbgeraden ein linksseitiges Schm.-K.-System ergibt, wenn die erwähnte Reihenfolge der Halbgeraden gemäß der nicht-signierten Permutation $(y) = (|\tilde{y}|)$ geändert und wenn dabei eine Halbgerade durch ihr Komplement ersetzt wird, falls das entsprechende $\tilde{y}$ negatives Vorzeichen besitzt. Wir wollen jedes so beschaffene rechtsseitige *Schm.-K.-System* als ein vermittelndes bezeichnen und jede dabei mögliche signierte Permutation als *eine rechtsseitige* vermittelnde Permutation. Die Existenz (mindestens) eines rechtsseitigen vermittelnden Schm.-K.-System haben wir (Nr. **1.** 5) bewiesen. Als rechtsseitige vermittelnde signierte Permutation trat dabei $(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \ldots, \tilde{\zeta}_n)$ auf. Der Existenzbeweis zeigt, daß es i. a. unendlich viele verschiedene rechtsseitige vermittelnde Schm.-K.-Systeme gibt. Bezüglich der rechtsseitigen vermittelnden signierten *Permutationen* gilt demgegenüber der

1. 6. 1. **Eindeutigkeitssatz.** *Zu einem gegebenen geordneten Paar von* $\tilde{S}iK$ *gibt es nur eine einzige rechtsseitige vermittelnde signierte Permutation, nämlich die zugehörige* (vgl. Nr. **1.** 5. 3).

Beweis. Ist $(\tilde{y}_i) = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ irgendeine vermittelnde signierte Permutation, so gibt es ein (rechtsseitiges) vermittelndes Schm.-K.-System mit den Halbachsen $Yh^1, \ldots, Yh^n$, wobei aber $th_i^+ = \widetilde{L}(Y^1, \ldots, Y^{i-1}Yh^i)$, $th_k^- = \widetilde{L}(Y^{y_1}, \ldots, Y^{y_k-1}Yh^{\tilde{y}_k})$, $i, k = 1, \ldots, n$ (vgl. Nr. **1.** 5. 2, (I), (II) sowie Nr. **1.** 5. 3, Schluß).

Zufolge der Definition der Schm.-K.-Systeme (Nr. **0.** 3. 3) gilt

(a) $$Yh^i < th_i^+, \quad Y^i \not< t_{i-1}^+ ,$$

(b′) $$Yh^{\tilde{y}_k} < th_k^-, \quad Y^{y_k} \not< t_{k-1}^- , \qquad i, k = 1, \ldots, n.$$

Gemäß der Definition von $(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ sind nun Yh^{y_j} und $Yh^{\tilde{y}_j}$ identisch bzw. komplementär, je nachdem sign $\tilde{y}_j$ positiv bzw. negativ ist. Aus (b′) folgt ohne weiteres

(b) $$Yh^i < t_{r_i}^-, \quad Y^i \not< t_{r_i-1}^- ,$$

wobei $(\tilde{r}) = (\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n) = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)^{-1}$, also (r) die nicht-signierte Reziproke von $(\tilde{y})$ bedeutet. Gemäß (a) und (b) gilt also für die Achsen mit der gewünschten Eigenschaft *notwendig*

$$Yh^i < (th_i^+ \cap t_{r_i}^-), \quad Y^i < (t_{i-1}^+ \cap t_{r_i}^-), \quad Y^i < (t_i^+ \cap t_{r_i-1}^-), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Daraus folgt für die Zahlen r_i, daß $(i; r_i) \neq (i-1; r_i)$, $(i; r_i) \neq (i; r_i - 1)$, also nach Nr. **1.** 2. 1, daß $(i; r_i) = (i-1; r_i) + 1 = (i; r_i - 1) + 1$, für $i = 1, \ldots, n$. Nach Definition von σ_i (vgl. Nr. **1.** 3) ist aber $(i; r_i) - (i-1; r_i) = 1$ nur erfüllt, wenn $r_i \geqq \sigma_i$; und diese Ungleichung kann, da sowohl die σ_i als auch die r_i eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$ darstellen, nur dann für alle $i = 1, \ldots, n$ erfüllt sein, wenn durchweg $r_i = \sigma_i$, also auch $y_i = \zeta_i$ ist. Schließlich ist sign $\tilde{r}_i =$ sign $\tilde{\sigma}_i$, d. h. $(\tilde{r}) = (\tilde{\sigma})$ oder $(\tilde{y}) = (\tilde{\zeta})$. Denn zufolge der Definition von $(\tilde{y})$ (vgl. Nr. **1.** 6 sowie Nr. **0.** 3. 3) sind $Yh^{\tilde{y}_k} = Yh_-^k$ (vgl. Bezeichnung und Satz in Nr. **1.** 5. 3) und $Yh^{y_k} = Yh_+^{y_k}$ identisch oder komplementär, je nachdem sign $\tilde{y}_k = +1$ oder -1 ist. Gemäß der Definition der $Yh_\pm^k$ (vgl. (a), (b′)) liegt nun aber $Yh_+^{y_k}$ in $th_{y_k}^+$ und Yh_-^k in th_k^-. Wir haben daher die gleiche Sachlage wie in Nr. **1.** 5. 2.

Daraus folgt sign $\tilde{y}_k =$ sign $\tilde{\zeta}^k$, w. z. b. w.

1. 6. 2. Bei den *bisher* betrachteten *rechtsseitigen* vermittelnden Schm.-K.-Syst. gingen wir von einem rechtsseitigen Schm.-K.-Syst. aus. Nehmen wir dagegen ein linksseitiges Schm.-K.-Syst. zum Ausgangspunkt, so wird dieses als *linksseitiges vermittelndes Schm.-K.-Syst.* zu bezeichnen sein, falls durch Vornahme einer passend gewählten (sogen. linksseitigen) signierten Permutation aus ihm ein „rechtsseitiges" Schm.-K.-Syst. erhalten werden kann. Es ergibt sich der

Satz. *Die linksseitige vermittelnde signierte Permutation ist eindeutig bestimmt und zwar ist sie die Reziproke $(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n)$ der rechtsseitigen $(\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_n)$.*

Beweis. Die (signierte) Reziproke einer vermittelnden signierten linksseitigen Permutation ist eine rechtsseitige vermittelnde signierte Permutation. Wegen Nr. **1.** 6. 1 folgt daraus die Behauptung.

Zusatz. Gilt für die Halbachsen $Xh_+^1, \ldots, Xh_+^n$:

$$th_i^+ = \widetilde{L}(X_+^1, \ldots, X_+^{i-1}Xh_+^i)$$
$$th_k^- = \widetilde{L}(X_+^{\zeta_1}, \ldots, X_+^{\zeta_k-1}Xh_+^{\tilde{\zeta}_k}), \qquad i, k = 1, \ldots, n;$$

und setzen wir $Xh_-^k = Xh_+^{\tilde{\zeta}_k}$, sowie $Xh_+^i = Xh_-^{\tilde{\sigma}_i}$, so gilt auch

$$th_k^- = \widetilde{L}(X_-^1, \ldots, X_-^{k-1}Xh_-^k)$$
$$th_i^+ = \widetilde{L}(X_-^{\sigma_1}, \ldots, X_-^{\sigma_i-1}Xh_-^{\tilde{\sigma}_i}), \qquad i, k = 1, \ldots, n.$$

1.7. Die Typen der singulären Punkte. Für das Folgende wollen wir den Begriff eines singulären Punktes zusammen mit der Orientierung seines Trägerbogens als orientierten (singulären) Punkt bezeichnen. Jedem orientierten singulären Punkt ist dann eindeutig ein geordnetes Paar von $\tilde{SiK}$ und damit eine rechtsseitige signierte Permutation $(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n)$ zugeordnet. Gemäß Nr. **1.** 6. 2 stimmen für alle Punkte mit gleicher rechtsseitiger signierter Permutation auch die (zu ihnen reziproken) linksseitigen signierten Permutationen überein. Wir können daher erklären:

Zwei singuläre orientierte Punkte werden als typengleich *bezeichnet, wenn sie in der rechtsseitigen (linksseitigen) signierten Permutation übereinstimmen.*

Der Typus wird also repräsentiert durch die rechtsseitige bzw. die zu ihr reziproke linksseitige signierte Permutation; diese Permutationen liefern also eine Klasseneinteilung der singulären Punkte in Übergangstypen (Zusammensetzungstypen) im Sinne der Gestaltstheorie [24]).

Zusatz. Die obigen Typen sind natürlich im Grunde *Typen für die gegenseitige Lage zweier orientierter Schmieginzidenzketten*. Eine Verfeinerung unserer Singularitätenklassifikation erhalten wir so: Wir fassen unter den, zur gleichen signierten Permutation gehörigen Singularitäten diejenigen in eine Klasse zusammen, für welche die (vermittelnden) Schmiegkoordinatensysteme an $\mathfrak{b}^+$ in P den gleichen Windungssinn besitzen (d. h. durch eine projektive Transformation mit positiver Determinante in einander überführbar sind). Diese Klassen sind dann *Isotopieklassen* im folgenden Sinne: Die vermittelnden Schmiegkoordinatensysteme je zweier, zur gleichen Klasse gehöriger Singularitäten können stetig in einander übergeführt werden derart, daß im Laufe dieser Überführung das Koordinatensystem niemals ausartet (d. h. daß die n Achsen nie zusammen in der gleichen $(n-1)$-Ebene liegen) und daß nur solche vermittelnde Schmiegkoordinatensysteme auftreten, welche zur gleichen signierten Permutation gehören, wie die beiden Ausgangssysteme bzw. Ausgangssingularitäten.

1.8. Anzahl der Typen. Die Anzahl der möglichen Typen orientierter singulärer Punkte ist offenbar gleich der Anzahl der signierten Permutationen von n Elementen, also gleich $2^n \cdot n!$ Man beachte, daß durch die signierte rechtsseitige Permutation lediglich eine gewisse Lage des rechts- zum linksseitigen Schmiegkoordinatensystem beschrieben wird und daß sich daher zu jeder signierten Permutation auch wirklich ein orientierter singulärer (sogar elementarer) Punkt angeben läßt.

Die Anzahl der nicht-orientierten singulären Punkte ist gleich $2^{n-1} \cdot n! + \frac{1}{2} A$, wobei A die Anzahl der zu sich selbst reziproken signierten Permutationen ist; letztere sind als Produkt von lauter Zweier- (und Einer-) Zyklen darstellbar [25]).

1.9. Allgemeine und spezielle singuläre Punkte.

1.9.1. Wir sagen, zwei (beliebig dimensionale) Ebenen des R_n befinden sich in allgemeiner Lage zueinander, wenn ihre *Verbindung* die *maximale* Dimension aufweist unter allen, bei den gegebenen Dimensionen der beiden Ebenen möglichen Dimensionen.

Zufolge Nr. **1.** 2. 1 wird dann der Durchschnitt eine minimale Dimension haben. Befinden sich für einen singulären Punkt *jede* rechts- und *jede* linksseitige Tangentialschmiegebene in allgemeiner Lage zueinander, so sollen die beiden zugehörigen SiK ebenfalls als zueinander in allgemeiner Lage befindlich bezeichnet werden. Im Falle allgemeiner Lage der beiden SiK besitzen die Zahlen in jeder Zeile der $(i; k)$-Matrix den jeweils niedrigsten Wert. Da $(i; 0) = 0$ und da zwei aufeinanderfolgende Zahlen der

[24]) Vgl. Haupt [4], Nr. 3. 3.

[25]) Vgl. Haupt, a. a. O. [18]), S. 71. Bezüglich der Anzahl A vgl. Aubry [1].

Zeile sich um 0 oder 1 unterscheiden und da ferner $(i; n) = i$, so erhalten wir für die i-te Zeile $0, 0, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, i$ und entsprechend $0, 0, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, k$ für die k-te Spalte. Das Minimum von $(i; k) = \mathrm{Dim}\,(t_i^+ \frown t_k^-)$ bei festem i und k ist $\min\,(i; k) = \frac{1}{2}\,(|\,i + k - n\,| + i + k - n)$. Im Hinblick auf die Definition von (ζ) und (σ) erhalten wir daher

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = (n, n-1, \ldots, 2, 1) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

als vermittelnde (nicht-signierte) Permutation für die allgemeinen Typen und allgemeinen singulären Punkte, d. h für diejenigen, bei welchen die zugehörigen *Sik* in allgemeiner Lage zueinander sich befinden Da dieser Permutation 2^n verschiedene signierte Permutationen entsprechen, so gibt es genau 2^n allgemeine Typen.

1. 9. 2. Als spezielle Lage können wir in einem gewissen Sinne jene bezeichnen, bei der die Verbindungen $(t_i^+ \smile t_k^-)$ eine *minimale*, also die *Schnittebenen* eine — unter den gegebenen Bedingungen, d. h. bei $t_0^+ = t_0^-$ — *maximale* Dimension aufweisen.

Es sollen also die Zahlen $(i; 0), (i; 1), \ldots, (i; n)$ der i-ten Zeile möglichst groß sein. Dies ist der Fall, wenn diese Zeile lautet: $0, 1, \ldots, i, i, i, \ldots, i$. Entsprechendes gilt für die Spalten. Das Maximum von $(i; k) = \mathrm{Dim}\,(t_i^+ \frown t_k^-)$ bei festem i und k ist $\max\,(i; k) = \frac{1}{2}\,(-|\,i - k\,| + i + k)$. Insbesondere ist also hier $(i; i) = i$. Daher ist hier $(t_i^+ \frown t_i^-) = t_i^+ = t_i^-$.

Wir erhalten also mit den speziellen Lagen gerade alle differenzierbaren singulären (orientierten) Punkte [26]), die wir daher auch als spezielle Punkte bzw. Typen bezeichnen. Die zugehörige vermittelnde Permutation lautet

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = (1, 2, \ldots, n) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Unter Berücksichtigung der Vorzeichen gibt es also 2^n verschiedene spezielle Typen, d. h. differenzierbare Punkte.

§ 2. Konstruktion von r-Sekanten.

2. 1. In § 1 hatten wir Zusammensetzungstypen für je zwei Bogen aufgestellt, wobei jeder Bogen im (gemeinsamen) Zusammensetzungspunkt Tangentialschmieghalbebenen aller Dimensionen besitzt. Unser weiteres Ziel ist, eine Mindestordnung für jeden dieser Zusammensetzungstypen zu gewinnen, und zwar lediglich unter Benützung der den Typus kennzeichnenden signierten (z. B.) rechtsseitigen Permutation. Die Bestimmung einer solchen Mindestordnung soll in § 3 geleistet werden. Diese Bestimmung erfolgt, der Natur der Sache entsprechend, durch Konstruktion von Hyperebenen, von welchen die betrachtete Bogensumme in beliebig vorgegebener Umgebung von P und in möglichst vielen Punkten getroffen wird. Der Vorbereitung einer solchen Konstruktion dienen die Betrachtungen des gegenwärtigen § 2.

Für das zunächst Folgende genügt es, einen (nicht notwendig orientierten) Bogen $\mathfrak{B}$ von endlicher Ordnung zu betrachten und zwar in der Umgebung eines seiner Endpunkte, der etwa mit P bezeichnet werde. Es sei nun Yh^ν, $\nu = 1, \ldots, n$, ein Schmieg-koordinatensystem von $\mathfrak{B}$ in P, bezüglich dessen $\mathfrak{B}$ in einer Umgebung von P dargestellt wird in der Gestalt $x_\nu = h_\nu(s)$, wo $s \geqq 0$, ferner $P = (h_\nu(0) = 0) = (0, \ldots, 0)$ und [27]) $h_\nu(s) > 0$ für $s > 0$, $\nu = 1, \ldots, n$.

---

[26]) Es sind dies genau die bekannten, auf Chr. v. Staudt ([1], § 15, S. 110 ff.) zurückgehenden Singularitäten der Kurven mit stetiger (aber nicht notwendig scharfer) Tangente. Bezüglich weiterer Literatur vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. III_2, 383, 1340—1341, 1252-1253.

[27]) Da $\mathfrak{B}$ von *endlicher* Ordnung sein soll, existieren die Tangentialschmieghalbebenen in P an $\mathfrak{B}$ (vgl. Fußnote [10])) und es hat ferner eine hinreichend kleine Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ mit jeder der Schmiegebenen und auch mit jeder der Achsen nur den Punkt P gemeinsam.

Es gilt nun folgender Hilfssatz über die Stärke, mit der sich $\mathfrak{B}$ bei Annäherung an $s = 0$ an die einzelnen Schmiegebenen anschmiegt.

Schmiegsatz. *Für die Darstellung* $x_\nu = h_\nu(s)$, $\nu = 1, \ldots, n$, $s \geqq 0$, *einer einseitigen Umgebung des Punktes* P *auf einem Bogen* $\mathfrak{B}$ *von endlicher Ordnung bezüglich eines entsprechenden (einseitigen) Schmiegkoordinatensystems in* $P = (0, \ldots, 0)$ *an* $\mathfrak{B}$ *gilt:*

$$h_i(s) : h_{i+k}(s) \to \infty \text{ mit } s \to 0,$$

wobei $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $0 < k \leqq n - i$ *sein soll und wobei* $h_0(s) = 1$ *gesetzt ist.*

1. Zusatz. Gilt der Schmiegsatz für den Bogen $h_\nu(s)$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, so auch für $h_\nu^*(s) = h_\nu(s) + o(h_\nu(s))$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$.

2. Zusatz. Ist $\mathfrak{B}$ speziell (Summe zweier Bogen) *von n-ter Ordnung*, so konvergieren die Quotienten $q(i; i+k; s) = h_i(s) : h_{i+k}(s)$ sogar *schließlich monoton*, d. h. es gibt ein festes (auch von i und k unabhängiges) $s_0 > 0$, so daß für alle s', s'' mit $0 < s' < s'' \leqq s_0$ gilt: $q(i; i+k; s'') < q(i; i+k; s')$.

Beweis des Schmiegsatzes. Die $(j-1)$-dimensionale Schmiegebene t_{j-1} in P an $\mathfrak{B}$ ist $x_\varrho = 0$, $\varrho = j, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n-1$. Die j-dimensionale Verbindungsebene $(t_{j-1} \cup Q)$ von t_{j-1} mit einem beliebigen, von P verschiedenen Punkte $Q = (h_\nu(s'))$ von $\mathfrak{B}$ ist die Menge aller Punkte $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda h_j(s'), \ldots, \lambda h_n(s'))$, wo die $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda$ beliebige reelle Zahlen bedeuten. Ferner ergibt sich für den Schnittpunkt $S(Q)$ von $(t_{j-1} \cup Q)$ mit der $(n-j)$-dimensionalen Ebene $x_1 = x_2 = \cdots = x_j = 1$, daß

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{j-1} = 1, \quad \lambda = 1 : h_j(s'),$$

also $x_{j+k} = h_{j+k}(s') : h_j(s') = q(j+k; j; s')$. Läßt man nun s' eine Folge s_ϱ mit $s_\varrho \to 0$ für $\varrho \to \infty$ durchlaufen, so gilt $Q_\varrho = (h_\nu(s_\varrho)) \to P$, somit $(t_{j-1} \cup Q_\varrho) \to t_j$, gemäß der Definition von t_j (Nr. **0**. 3. 1); also $S(Q_\varrho) \to (x_1 = \cdots x_j = 1, x_{j+1} = \cdots = x_n = 0)$ d. h. $q(j+k; j; s_\varrho) \to 0$. Wegen $h_\nu(s_\varrho) > 0$, $\nu = 1, \ldots, n$, für schließlich alle ϱ folgt $q(j; j+k; s_\varrho) \to +\infty$ und zwar für jede Folge $\{s_\varrho\}$ mit $s_\varrho \to 0$. Schließlich ist wegen $h_0(s) = 1$ selbstverständlich, daß $q(0; k; s_\varrho) \to \infty$. Damit ist alles bewiesen.

Beweis des 2. Zusatzes. Wir erbringen den Beweis vermittelst Projektion, durch die wir alles auf den Fall der ebenen Bogen zweiter Ordnung zurückführen. Sind nämlich $X_1, \ldots, X_n$ die Achsen des betrachteten Schmiegkoordinatensystems, so setzen wir $X_i = X_1'$, $X_{i+k} = X_2'$ und bezeichnen die übrigen X_n in irgendeiner Reihenfolge mit $X_3', \ldots, X_n'$. Wir projizieren nun die betrachtete einseitige Umgebung $\mathfrak{U}$ von P auf $\mathfrak{B}$ aus dem uneigentlichen Punkte der Achse X_n' auf die $(n-1)$-dimensionale Ebene $e^{(n-1)} = X_1' \cup X_2' \cup \cdots \cup X_{n-1}'$. Wir erhalten als Bild $\mathfrak{U}_1'$ von $\mathfrak{U}$ einen Bogen von höchstens n-ter Ordnung in $e^{(n-1)}$. Es gibt dann eine Umgebung $\mathfrak{U}_1''$ von P auf $\mathfrak{U}_1'$, welche von $(n-1)$-ter Ordnung ist [28]), d. h. eine Umgebung $\mathfrak{U}_1$ von P auf $\mathfrak{U}$, welche sich in einen Bogen $(n-1)$-ter Ordnung projiziert. So fortfahrend gelangen wir nach $n-2$ Projektionsschritten zu einer Umgebung $\mathfrak{U}_{i,i+k}$ von P auf $\mathfrak{B}$, die sich nach $(X_i \cup X_{i+k})$ als Bogen $\mathfrak{U}_{i,i+k}'$ von zweiter Ordnung projiziert, welcher in Bezug auf X_i und X_{i+k} als Koordinatenachsen dargestellt wird durch $x_i = h_i(s)$, $x_{i+k} = h_{i+k}(s)$. Es ist aber die X_i-Achse Tangente an $\mathfrak{U}_{i,i+k}'$; dies folgt unmittelbar aus $q(i+k; i; s) \to 0$ mit $s \to 0$, weil $q(i+k; i; s)$ der Differenzenquotient von x_{i+k} bezüglich x_i zwischen $s = 0$ und s ist. Wegen der Konvexität von $\mathfrak{U}_{i,i+k}'$ konvergiert dieser Differenzenquotient sogar monoton, falls nur s kleiner ist als ein passendes $s_{i,k}$. Nimmt man Min $(s_{i,k})$ für alle zulässigen (endlich vielen) Zahlenpaare i, k, so erhält man das s_0 der Behauptung.

[28]) Vgl. Haupt [1], Nr. 2. 1.

2.2. Mit Hilfe des Schmiegsatzes können wir jetzt leicht gewisse Sekanten von $\mathfrak{B}$ konstruieren, welche mit $\mathfrak{B}$ in einer einseitigen, beliebig klein wählbaren, Umgebung von P mindestens r Punkte gemeinsam haben; dabei ist r beliebig vorgegeben ($0 \leqq r \leqq n$).

Wir legen wieder ein Schmiegkoordinatensystem in P zugrunde und $\mathfrak{B}$ in der Gestalt $x_\nu = h_\nu(s)$, $s \geqq 0$, mit $h_\nu(s) > 0$ für $s > 0$, $\nu = 1, \ldots, n$. Setzen wir noch $x_0 = h_0(s) = 1$, so lautet die Gleichung der zu betrachtenden Hyperebene

$$S(x) = S(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x_\nu.$$

Die $a_0, a_1, \ldots, a_n$ werden wir als Koordinaten der Hyperebene (in Bezug auf das zu Grunde gelegte Koordinatensystem) bezeichnen und kurz auch von der Ebene $S(x)$ bzw. $S(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. (a) bzw. $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ sprechen, letzteres natürlich nur, soweit Verwechslungen hinsichtlich des benutzten Koordinatensystems nicht möglich sind. Falls es sich um das System der absoluten Beträge $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|$ handelt, schreiben wir entsprechend $(|a|)$.

Nun ist die Anzahl der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{B}$ und (a) gleich der Anzahl der Nullstellen von $f(s) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu h_\nu(s)$. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von mindestens r gemeinsamen Punkten ist daher die, daß zu (a) mindestens $r+1$ Übergewichtsstellen mit abwechselnden Vorzeichen existieren. Dabei bezeichnen wir s' als eine Übergewichtsstelle bezüglich (a) für $\mathfrak{B}$, wenn in $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu h_\nu(s')$ eines der Glieder, etwa das zu $\nu = j$ gehörige, also $a_j h_j(s')$, seinem absoluten Betrage nach größer ist als die Summe der absoluten Beträge aller übrigen Glieder. Es heiße dann a_j der (zugehörige) Übergewichtskoeffizient und $a_j h_j(s)$ das zugehörige *Übergewichts*glied und j ein *Übergewichts*index bezüglich (a) für $\mathfrak{B}$. Wegen $h_0(0) = 1$ und $h_\nu(0) = 0$, $\nu = 1, \ldots, n$, ist $s = 0$ stets (triviale) Übergewichtsstelle mit dem Index 0. Nun ist aber das Vorzeichen von $f(s)$ an der Übergewichtsstelle $s = s'$ gleich dem Vorzeichen des zugehörigen Übergewichtsgliedes, also des Übergewichtskoeffizienten (wegen $h_\nu(s) > 0$ für $s > 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$). Sind daher $0 \leqq s_0 < s_1 < \cdots < s_r$ Übergewichtsstellen mit den Indizes $0 \leqq j_0 < j_1 < \cdots < j_r$ und besitzen die Übergewichtskoeffizienten abwechselndes Vorzeichen, d. h. ist $a_{j_{\varrho-1}} \cdot a_{j_\varrho} < 0$, $\varrho = 1, \ldots, r$, so besitzt $f(s)$ mindestens r Nullstellen.

2.3. Mit Hilfe des Schmiegsatzes gelingt es zunächst:

Zu einem beliebig vorgegebenen Index j ($0 \leqq j \leqq n$) und zu einer beliebig vorgegebenen rechtsseitigen Umgebung $\mathfrak{U}$ von P auf $\mathfrak{B}$ Hyperebenen (a) zu konstruieren, die eine in $\mathfrak{U}$ gelegene und zu j als Übergewichtsindex gehörige Übergewichtsstelle besitzen.

Dabei darf noch von vornherein

A. jeder *rechts* vom *Übergewichtskoeffizienten* a_j stehenden Ebenenkoordinate, also jedem $a_{j+1}, \ldots, a_n$, ein *beliebiger* fester *Wert* erteilt werden;

B. der Übergewichtskoeffizient a_j beliebig, nur *von Null verschieden* gewählt werden;

C. für die *links* vom *Übergewichtskoeffizienten* a_j stehenden Ebenenkoordinaten, also für $a_0, \ldots, a_{j-1}$ sofern $j > 0$, eine *obere Schranke* der absoluten Beträge beliebig vorgeschrieben werden.

I. *Bestimmung der Übergewichtsstelle.* Nach beliebiger Festlegung der $a_j, \ldots, a_n$ mit $a_j \neq 0$, oder auch nach Wahl von $|a_j| \neq 0$ und von einer oberen Betragschranke $\bar{M}$ für die $|a_{j+1}|, \ldots, |a_n|$, gilt gemäß dem Schmiegsatze für jedes hinreichend kleine $s' > 0$ aus $\mathfrak{U}$ die Ungleichung

$$\sum_{\mu=j+1}^{n} |a_\mu| h_\mu(s') < \tfrac{1}{4} |a_j| h_j(s').$$

Wir wählen ein derartiges s'. Dabei ist $0 \leqq j < n$ angenommen, weil für $j = n$ die vorstehende Ungleichung gegenstandslos wird; für $j = n$ kann und soll dann $s' > 0$ in $\mathfrak{U}$ beliebig gewählt werden. Die obere Schranke für s' hängt nur von $|a_j|$ und $\overline{M}$ ab.

II. *Wahl einer Linksschranke.* Um nun s' wirklich zur Übergewichtsstelle bezüglich (a) mit dem Übergewichtsindex j zu machen, genügt es, die links vom Übergewichtskoeffizienten a_j stehenden Koeffizienten a_ν absolut hinreichend klein zu machen. In der Tat wird

$$\sum_{\nu=0}^{j-1} |a_\nu|\, h_\nu(s') < \tfrac{1}{4}\, |a_j|\, h_j(s'),$$

für $|a_\nu| \leqq M$ mit $\nu = 0, 1, \ldots, j-1$, sobald nur die (Links-)Schranke M hinreichend klein ist. Für $j = 0$ wird die Ungleichung gegenstandslos.

Zusatz. $j = 0$ kann ersichtlich stets zum Übergewichtsindex gemacht werden, wie immer auch über die $a_1, \ldots, a_n$ und $a_0 \neq 0$ bereits verfügt ist.

2. 4. Auf Grund von Nr. **2.** 3 lassen sich jetzt auch zu einer *beliebigen Anzahl* $r+1$, $0 \leqq r \leqq n$, und zu beliebig vorgegebenen Indizes $j_0 < j_1 < \cdots < j_r$ Hyperebenen (a) konstruieren, für welche die j_ϱ, $\varrho = 0, \ldots, r$, sämtlich Übergewichtsindizes sind, deren zugehörige Übergewichtsstellen einer beliebig kleinen rechtsseitigen Umgebung von $s = 0$ angehören. Wie man aus Nr. **2.** 3, **A, B** und **C** erkennt, muß nur

D. *die Konstruktion schrittweise von rechts nach links erfolgen, also nach fallenden Indizes hinsichtlich der in den Übergewichtsgliedern auftretenden* $h_\nu(s)$. Für die vorgegebenen Indizes entspricht das der Reihenfolge $j_r, j_{r-1}, \ldots, j_1, j_0$.

In der Tat gelingt der Konstruktionsschritt II. (Nr. **2.** 3) bedingungslos nur, wenn über die links vom Übergewichtskoeffizienten stehenden a_ν höchstens durch Angabe einer oberen Betragsschranke verfügt ist, aber *z. B. nicht, wenn der absolute Betrag eines links vom Übergewichtskoeffizienten stehenden* a_ν *bereits vollkommen festgelegt ist.*

2. 4. 1. Man beachte, daß *bei dieser Konstruktion für die nicht zu den Übergewichtskoeffizienten gehörigen Koordinaten* a_ν *lediglich obere Betragsschranken vorgeschrieben werden.* Innerhalb dieser Schranken können besagte a_ν willkürlich verändert werden, ohne daß dadurch die Übergewichtsindizes und die Übergewichtsstellen irgendwie beeinflußt werden.

2. 4. 2. **Anmerkungen.** 1. Läßt man $\mathfrak{U}$ eine absteigende, auf P sich zusammenziehende Umgebungsfolge durchlaufen, so liefert unsere Konstruktion eine *r-Sekantenfolge* im Sinne von Nr. **0.** 3. 4.

2. Die *größte* Übergewichtsstelle s_r könnte bei der Konstruktion auch beliebig vorgegeben werden. Man hätte alsdann $\left|\sum_{\mu=j_r+1}^{n} a_\mu h_\mu(s_r)\right|$ dadurch hinreichend klein zu machen, daß man die $|a_\mu|$ hinreichend klein wählt (falls $j_r < n$).

3. Die oben beschriebene Konstruktion der Übergewichtsstellen bezüglich (a) zu vorgegebenen Indizes $j_0, j_1, \ldots, j_r$ bleibt unverändert, wenn man die Übergewichtskoeffizienten *überdies* einer *Größenordnungsbedingung* unterwirft, nämlich fordert, daß $|a_{j_{\varrho-1}} : a_{j_\varrho}| \leqq q$ für $\varrho = 1, \ldots, r$, wobei q mit $0 < q < 1$ beliebig vorgegeben ist. Entsprechend könnte man fordern, daß $|a_{j_\varrho} : a_\mu| \geqq Q$ für $j_\varrho < \mu < j_{\varrho+1}$, $\varrho = 0, \ldots, r-1$, wobei $Q \geqq 1$ beliebig vorgeschrieben ist. Bei Hinzunahme dieser zweiten Bedingung läßt sich die erste etwas allgemeiner so fassen: $|a_\lambda : a_{j_\varrho}| \leqq q$ für $0 \leqq \lambda < j_\varrho$, $\varrho = 1, \ldots, r$.

2. 5. Die in Nr. **2.** 4 angegebene Konstruktion einer rechtsseitigen r-Sekante gilt natürlich auch für linksseitige. Beidemale erhält man aber höchstens n Übergewichtsstellen, also höchstens n-Sekanten, was geometrisch trivial ist. *Um auch* — soweit dies überhaupt möglich ist — *Schnittpunktsanzahlen größer als n zu erhalten*, muß man daher Hyperebenen zu konstruieren suchen, die gleichzeitig in rechts- *und* linksseitiger Um-

gebung des Zusammensetzungspunktes Schnittpunkte mit dem Bogen besitzen. Bei einer solchen Konstruktion, die wir weiter unten (Nr. **2.** 6. 1) angeben, wird es aber jetzt nicht mehr bedingungslos möglich sein, *beliebig* vorgesehene m Indizes, mit $n \leqq m \leqq 2n$ *gleichzeitig* sämtlich zu Übergewichtsindizes zu machen; vielmehr müssen solche Indizes gewissen *Bedingungen* genügen, *die wesentlich vom Zusammensetzungstypus abhängen* und die sich alsbald ergeben werden.

2. 5. 1. Zur Vorbereitung der in Nr. **2.** 5 angekündigten Konstruktion sei an folgendes erinnert. Es sei $\mathfrak{B}$ Summe zweier Bogen mit den in P zusammenstoßenden Komponenten $\mathfrak{b}^+$ und $\mathfrak{b}^-$ (vgl. Nr. **0.** 3. 1). Wir legen ein vermittelndes Schmiegkoordinatensystem zu Grunde und bezeichnen das zugehörige rechts- bzw. linksseitige Schm.-K.-System (vgl. Nr. **1.** 6) mit

$$(1^+) \qquad Xh^1_+, \ldots, Xh^n_+ \qquad \text{bzw.} \qquad (1^-) \qquad Xh^1_-, \ldots, Xh^n_-.$$

Dabei ist

$$(2) \qquad Xh^\varkappa_- = Xh^{\tilde{\xi}_\varkappa}_+, \; Xh^\varkappa_+ = Xh^{\tilde{\sigma}_\varkappa}_-, \qquad \varkappa = 1, \ldots, n.$$

Für $\mathfrak{b}^+$ bzw. $\mathfrak{b}^-$ haben wir dann bezüglich (1^+) bzw. (1^-) eine Darstellung

$$(3^+) \qquad x^+_\nu = h^+_\nu(s), \; 0 \leqq s, \qquad \text{bzw.} \quad (3^-) \qquad x^-_\nu = h^-_\nu(s), \; 0 \leqq s, \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

Hat nun eine Hyperebene S in Bezug auf (1^+) bzw. (1^-) die Koordinaten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ bzw. $b_0, b_1, \ldots, b_n$, so wollen wir (a) und (b) als zueinander *konjugierte Darstellungen* von S, kürzer als konjugiert, bezeichnen. Wegen (2) gilt dabei

$$(4) \qquad a_j = b_{\tilde{\sigma}_j}, \; b_\varkappa = a_{\tilde{\xi}_\varkappa}, \qquad j, \varkappa = 1, \ldots, n;$$

$$(5) \qquad b_{\tilde{\sigma}_j} = b_{\sigma_j} \operatorname{sign}(\tilde{\sigma}_j), \quad a_{\tilde{\xi}_\varkappa} = a_{\xi_\varkappa} \operatorname{sign}(\tilde{\xi}_\varkappa), \qquad j, \varkappa = 1, \ldots, n;$$

$$\tilde{\sigma}_0 = \tilde{\xi}_0 = 0, \quad b_{\tilde{\sigma}_0} = a_{\tilde{\xi}_0} = a_0 = b_0.$$

2. 6. Wir wenden uns zur Durchführung der in Nr. **2.** 5 in Aussicht gestellten Konstruktion. *Zunächst* konstruieren wir *nur Übergewichtsstellen*, lassen also die Vorzeichen der a_ν, b_ν außer Betracht.

Wir wählen ganz willkürlich unter den Indizes $0, 1, \ldots, n$ der $a_0, \ldots, a_n$ bzw. $b_0, \ldots, b_n$ irgend $r+1$ bzw. $t+1$ aus; sie seien, der Größe nach geordnet, etwa:

$$(6) \qquad j_0 < j_1 < \cdots < j_r, \quad \text{mit} \quad 0 \leqq j_0 < j_r \leqq n,$$

$$\varkappa_0 < \varkappa_1 < \cdots < \varkappa_t, \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \varkappa_0 < \varkappa_t \leqq n.$$

Unsere Aufgabe ist es nun, eine Hyperebene S zu finden, in deren (konjugierten) Darstellungen (a) bzw. (b) die j_ϱ bzw. $\varkappa_\tau$ Übergewichtsindizes werden [29]); und zwar soll die in Nr. **2.** 3 und Nr. **2.** 4 angegebene Konstruktion verwendet werden. Die Aufgabe ist insofern noch vieldeutig, als nichts über die Reihenfolge gesagt ist, in welcher die Konstruktion an den j_ϱ und $\varkappa_\tau$ vorgenommen werden soll; fest steht (gemäß Nr. **2.** 4, **D**) von vornherein nur, daß bei der Konstruktion die j_ϱ bzw. die $\varkappa_\tau$ je von rechts nach links in (6) durchlaufen werden müssen. *Um die Aufgaben eindeutig zu machen*, schreiben wir die $m = r + t + 2$, in den beiden Zeilen von (6) stehenden Zahlen $j_\varrho, \varkappa_\tau$ in irgendeiner Reihenfolge in *einer* Zeile an, aber so, daß die j_ϱ bzw. $\varkappa_\tau$ je unter sich der Größe nach, genau wie in (6), geordnet bleiben. Wir erhalten so:

$$(7) \qquad i_1, i_2, \ldots, i_m,$$

wobei i_μ gleich einem der j_ϱ oder $\varkappa_\tau$ ist.

---

[29]) Wobei natürlich noch nicht von vorneherein feststeht, ob jedes a_{j_ϱ} und $b_{\varkappa_\tau}$ auch wirklich zum Übergewichtskoeffizienten gemacht werden kann.

Gefordert wird jetzt, daß man *bei Durchführung der Konstruktion die Zahlen* (7) *in ihrer dortigen Reihenfolge von rechts nach links gehend behandelt.*

Anmerkung. Falls (in (6)) für ein ϱ und τ gilt: $j_\varrho = \alpha_\tau$, so tritt die Zahl $j_\varrho = \alpha_\tau$ zweimal auch in (7) auf, aber nicht notwendig an Plätzen, die in (7) benachbart sind.

2. 6. 1. Die Konstruktion verläuft nach dem Muster von Nr. **2.** 3 folgendermaßen:

1. Schritt. Zunächst kann i_m auf jeden Fall zum Übergewichtsindex gemacht werden, und zwar bezüglich (a) oder (b), je nachdem $i_m = j_r$ oder $i_m = \alpha_t$ ist. Es sei z. B. $i_m = j_r$; gemäß der Konstruktion wird dann über $|\, a_{j_r} \,| = |\, b_{\tilde{\sigma} j_r} \,|$ fest verfügt, während für die übrigen a_ν bzw. b_ν lediglich obere Betragsschranken vorgeschrieben werden.

2. Schritt. Falls $i_m = j_r$, gibt es für den zweiten Konstruktionsschritt die beiden Möglichkeiten: $i_{m-1} = j_{r-1}$ oder $i_{m-1} = \alpha_t$.

Erstens: Falls $i_{m-1} = j_{r-1}$, kann bedingungslos auch i_{m-1} zum Übergewichtsindex bezüglich (a) gemacht werden und zwar so, daß j_r Übergewichtsindex bleibt (vgl. Nr. **2.** 4).

Zweitens: Falls $i_{m-1} = \alpha_t$, kann man α_t *jedenfalls nur dann* bedingungslos (gemäß Nr. **2.** 4) *zum Übergewichtsindex bezüglich* (b) *machen* (und zwar unter *Erhaltung von* j_r *als Übergewichtsindex bezüglich* (a)), *wenn* j_r *in der Reihe der Zahlen* $0, 1, \ldots, n$ *nicht links von* ζ_{α_t} *steht*, wenn also $\zeta_{\alpha_t} \leqq j_r$ ist. In der Tat: Beim 1. Schritte wurde über $|\, a_{j_r} \,|$ bereits feste Verfügung getroffen. Ist daher $\zeta_{\alpha_t} < j_r$, so ist $|\, b_{\alpha_t} \,| = |\, a_{\zeta_{\alpha_t}} \,|$ lediglich einer Betragseinschränkung unterworfen und kann im Rahmen dieser (von Null verschieden) beliebig gewählt werden. — Ist ferner $\zeta_{\alpha_t} = j_r$, so ist zwar $|\, b_{\alpha_t} \,| = |\, a_{\zeta_{\alpha_t}} \,| = |\, a_{j_r} \,|$ bereits festgelegt, was aber (gemäß Nr. **2.** 3, **A** und **B**) für die Konstruktion der Übergewichtsstellen keinerlei Hindernis darstellt. — Ist dagegen $\zeta_{\alpha_t} > j_r$, so muß man darauf verzichten, α_t bedingungslos zum Übergewichtsindex bezüglich (b) zu machen [30]); man *geht daher zum nächstfolgenden Index* über, nämlich zu i_{m-2}, *ohne über* $|\, b_{\alpha_t} \,| = |\, a_{\zeta_{\alpha_t}} \,|$ *eine, gegenüber dem ersten Schritt neue Verfügung zu haben.*

2. 6. 2. Ganz entsprechend verlaufen die Überlegungen (der Nr. **2.** 6. 1), wenn $i_m = \alpha_t$ ist. *Allgemein* ergibt sich aus Nr. **2.** 6. 1 folgendes: Ist z. B. i_μ ein j_ϱ, so kann i_μ gemäß unserer Konstruktion *dann und nur dann* (bedingungslos) *zum Übergewichtsindex bezüglich* (a) *gemacht werden* (und zwar so, daß etwaige *bereits als Übergewichtsindizes konstruierte* unter den $i_m, \ldots, i_{\mu+1}$ als solche *erhalten bleiben*), *wenn keiner der bereits konstruierten*, einem der $i_{\mu+1}, i_{\mu+2}, \ldots, i_m$ entsprechenden, *Übergewichtskoeffizienten*, *als Element von* ($|\, a \,|$) *betrachtet, in* ($|\, a \,|$) *links von* $|\, a_{i_\mu} \,|$ *steht*. Und entsprechend, wenn i_μ ein α_τ ist.

Die Verfolgung der ganzen Konstruktion (etwa durch Induktion) bedarf jetzt keiner weiteren Erläuterung mehr.

2. 7. Was schließlich die *Vorzeichen der* $a_0, \ldots, a_n$ und $b_0, \ldots, b_n$ anlangt, so beachte man zunächst, daß vermöge (5) die der b_ν eindeutig durch die der a_ν bestimmt sind, sobald der Zusammensetzungstypus, also die *signierte* vermittelnde Permutation festliegt. *Schreibt man* also *in* (7) *gleichzeitig mit den* j_ϱ *und* α_τ *noch* sign (a_{j_ϱ}) und sign (b_{α_τ}) *unter Berücksichtigung von* (5) *vor*, so besitzt jedes durch die Konstruktion gemäß Nr. **2.** 6 gewonnene Übergewichtsglied ein wohlbestimmtes Vorzeichen. Zu einer Nullstelle von

$$(8) \qquad f^+(s) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu h_\nu^+(s), \quad \text{bzw.} \quad f^-(s) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu h_\nu^-(s),$$

geben dann (mindestens) je zwei in (a) bzw. (b) unmittelbar aufeinanderfolgende Übergewichtsglieder Anlaß, sobald sie verschiedenes Vorzeichen besitzen.

---

[30]) Weil man dann für $a_{\zeta_{\alpha_t}}$, als rechts von a_{j_r} stehend, nicht beliebig eine obere Schranke gemäß Nr. 2. 3., C. vorschreiben kann.

§ 3. Bestimmung einer Mindestordnung zu gegebenem Typus.

3. 1. Wir können nun eine *Mindestordnung für den vorgelegten Zusammensetzungstypus* dadurch bestimmen, daß wir (mit Hilfe der Darlegungen in Nr. **2.** 5ff.) *alle möglichen* Paare konjugierter $(n+1)$-tupel $(a_0, \ldots, a_n)$, $(a_{\bar{\zeta}_0}, \ldots, a_{\bar{\zeta}_n})$ konstruieren, welche Übergewichtsglieder mit abwechselnden Vorzeichen liefern. Es gibt nur beschränkt viele Möglichkeiten für derartige Systeme von Übergewichtsindizes bzw. -gliedern und Vorzeichen bzw. zugehörige konjugierte Paare von $(n+1)$-tupeln. Daher kann man *mit beschränkt vielen Versuchen* die maximale Anzahl von, durch *dieses* Verfahren erhältlichen, Punkten ermitteln, welche eine Hyperebene mit einer Bogensumme des vorgelegten Typus gemeinsam hat. Diese so ermittelte maximale Anzahl ist eine Mindestordnung für den vorgelegten Typus; man bemerkt, daß zur Definition dieser Mindestordnung wirklich nur der Typus, d. h. die signierte vermittelnde Permutation, benützt wird.

Da die Indizes 0 in (a) sowohl als in (b) bedingungslos und gleichzeitig zu Übergewichtsindizes gemacht werden können (vgl. Nr. **2.** 3, Zusatz), werden wir hier o. B. d. A. stets $j_0 = \alpha_0 = 0$ annehmen.

Es muß beachtet werden, daß die durch ein System von Übergewichtsstellen zu liefernde Nullstellenanzahl nicht nur von der Anzahl dieser Übergewichtsstellen abhängig ist, sondern auch *von der Bedingung abwechselnder Vorzeichen* (Nr. **2.** 7); es könnte also unter Umständen eine geringere Anzahl von Übergewichtsstellen mehr Nullstellen liefern, wenn die Übergewichtsindizes (aus einer fest vorgegebenen Reihe (7)) anders ausgewählt werden.

Anmerkung. Es gehört also zu jeder signierten Permutation eindeutig eine natürliche Zahl, eben diese Mindestordnung; ihre Bestimmung ist eine rein kombinatorische Aufgabe, deren Erledigung im Einzelnen wir einer späteren Gelegenheit vorbehalten.

3. 2. Aus Nr. **2.** 5ff. ergibt sich nunmehr folgende Regel für die Bestimmung unserer Mindestordnung *zu gegebenem Typus*.

Regel. Man wähle aus den natürlich geordneten Zahlen $0, 1, \ldots, n$ willkürlich je ein natürlich geordnetes System $j_0 < j_1 < \cdots < j_r$ bzw. $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_t$ von $r+1$ bzw. $t+1$ Zahlen aus und vereinige beide in willkürlicher Weise zu einem geordneten System (7) von $m = r + t + 2$ Zahlen $i_1, \ldots, i_m$ (vgl. Nr. **2.** 6) und zwar so, daß dabei die j_r unter sich sowie die α_t unter sich natürlich geordnet bleiben. Zugleich schreibe man mit jedem j_ϱ und α_τ auch sign (a_{j_ϱ}) und sign (b_{α_τ}) vor, dabei darf aber kein Verstoß gegen die mit dem Typus vorgegebene signierte Permutation erfolgen (also kein Verstoß gegen (5) in Nr. **2.** 5. 1), d. h. es muß sein sign $b_{\alpha_\tau} =$ sign $a_{\bar{\zeta}_{\alpha_\tau}}$ und sign $a_{j_\varrho} =$ sign $b_{\bar{\sigma}_{j_\varrho}}$.

Alsdann durchmustere man das System (7) von rechts nach links und streiche der Reihe nach jedes j_ϱ und α_τ, für welches folgendes gilt: In der Reihe $0, 1, \ldots, n$ steht j_ϱ bzw. α_τ rechts von mindestens einem derjenigen ζ_{α_λ} bzw. σ_{j_μ} (vgl. Nr. **2.** 5. 1), für welche α_λ bzw. j_μ in (7) rechts von j_ϱ bzw. von α_τ steht. Anders ausgedrückt:

Gibt es (in (7)) wenigstens ein α_λ bzw. j_μ, welches in (7) rechts von j_ϱ bzw. α_τ steht und wofür gleichzeitig $\zeta_{\alpha_\lambda} < j_\varrho$ bzw. $\sigma_{j_\mu} < \alpha_\tau$ gilt, so ist j_ϱ bzw. α_τ zu streichen.

Die von (7) danach noch verbleibenden Indizes j_ϱ bzw. α_τ seien in natürlicher Anordnung $j'_0 < j'_1 < \cdots < j'_p$ und $\alpha'_0 < \alpha'_1 < \cdots < \alpha'_q$ (wobei Indizes $j'_0 = 0$ bzw. $\alpha'_0 = 0$ stets vorhanden sind). Man konstruiere (gemäß Nr. **2.** 6) eine Hyperebene, in deren konjugierten Darstellungen (a) bzw. (b) (vgl. Nr. **2.** 5. 1) die j'_π bzw. $\alpha'_\varkappa$ Übergewichtsindizes sind. Dann ist die Zahl der Nullstellen von $f^+(s)$ und $f^-(s)$ zusammen (vgl. Nr. **2.** 7, (8)) mindestens so groß, wie die Anzahl der Vorzeichenwechsel in $a_{j'_0}, a_{j'_1}, \ldots, a_{j'_p}$ und in $b_{\alpha'_0}, b_{\alpha'_1}, \ldots, b_{\alpha'_q}$ zusammengenommen.

Zusatz. Diejenigen Systeme (7), d. h. $i_1, \ldots, i_m$, welche nach Anwendung der Regel in Nr. **3.** 2 noch übrig bleiben, lassen sich in gewissem Sinne auf Normalformen bringen. Es handle sich dabei um diejenige Systeme, in welchen für (mindestens) eines der auftretenden j_ϱ und α_τ, etwa für j_q und α_p gilt: $j_q = \zeta_{\alpha_p}$.

Steht nämlich etwa j_q in (7) *links von α_p, so können in* (7) *zwischen j_q und α_p keine j_ϱ auftreten.* Denn für ein zwischen j_q und α_p stehendes j_ϱ müßte $j_q < j_\varrho$ sein, also $\zeta_{\alpha_p} < j_\varrho$, so daß j_ϱ gemäß der Regel zu streichen wäre. Falls daher j_q und α_p nicht unmittelbar nebeneinanderstehen, muß (7) so aussehen

$$(7^*) \qquad j_q, \alpha_u, \alpha_v, \ldots, \alpha_w, \alpha_p,$$

wobei natürlich $j_q < \alpha_u < \alpha_v < \cdots < \alpha_w < \alpha_p$.

Bei der Konstruktion der Übergewichtsstellen wird nun mit b_{α_p} zugleich

$$| a_{j_q} | = | a_{\zeta_{\alpha_p}} | = | b_{\alpha_p} |$$

festgelegt, während a_{j_q} durch die weiteren, auf $\alpha_w, \ldots, \alpha_v, \alpha_u$ sich beziehenden Konstruktionsschritte unbeeinflußt bleibt. Man kann daher ohne jede Änderung des Ergebnisses statt (7*) auch

$$(7^{**}) \qquad \ldots, \alpha_u, \alpha_v, \ldots, \alpha_w, j_q, \alpha_p$$

zugrundelegen. Ganz Entsprechendes gilt für den Fall, daß α_p in (7) links von j_q steht und daß $j_q = \zeta_{\alpha_p}$ ist.

Weitere derartige, auf eine Verfeinerung der Regel in Nr. **3.** 2 abzielende, Bemerkungen sollen aber erst an anderer Stelle angegeben werden.

3. 3. Für die *allgemeinen* und die *speziellen* singulären Punkte (Nr. **1.** 9) kann die, gemäß unserer Regel (Nr. **3.** 2) sich ergebende Mindestordnung ohne weiteres bestimmt werden.

3. 3. 1. Für einen *allgemeinen* Punkt ist die vermittelnde nicht-signierte Permutation $(\zeta) = (n, n-1, \ldots, 2, 1)$. In Anwendung der Regel (Nr. **3.** 2) wähle man ein System von Indizes $(i_1, \ldots, i_m)$, welches aus zwei Systemen $j_0 = 0 < j_1 < \cdots < j_r \leqq n$ bzw. $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_t \leqq n$ sich zusammensetzt. Ist nun $i_m = j_r$, so kann j_r mit unserer Konstruktion (Nr. **3.** 2) stets zu einer Übergewichtsstelle gemacht werden. Für den weiteren Verlauf der Konstruktion kommt dann nach unserer Regel und in Rücksicht auf (ζ), d. h. auf $| a_{j_\varrho} | = | b_{n-j_\varrho+1} |$, keiner der Indizes $\alpha_\lambda, \ldots, \alpha_t$ in Betracht, wobei α_λ das kleinste α_τ bezeichnet, für welches $n - j_r + 1 < \alpha_\tau$ ist. Es bleiben daher für die Konstruktion noch $\lambda \leqq 1 + (n - j_r + 1)$ der α_τ zur Verfügung, also insgesamt nicht mehr als $(r+1) + (n - j_r + 2)$, also wegen $j_r \geqq r$ höchstens $n+3$ der $i_1, \ldots, i_m$; in dieser Anzahl ist, neben $j_0 = 0$ und $\alpha_0 = 0$, auch j_r selbst eingeschlossen, sowie $\alpha_{t'}$, wobei $\alpha_{t'} = n - j_r + 1$, soweit ein solches $\alpha_{t'}$ existiert. Die gleiche Höchstzahl ergibt sich, wenn $i_m = \alpha_t$ ist. Somit können nach dem Verfahren unserer Regel höchstens $n+3$ Übergewichtsstellen konstruiert werden. Daher kann die Mindestordnung nicht größer sein als $n+1$; denn unsere Mindestordnung kann nicht größer sein als die Summe der je um Eins verminderten Anzahl der rechts- bzw. linksseitigen Übergewichtsstellen.

Auf Grund der eben gemachten Feststellung läßt sich jetzt unsere Mindestordnung für jeden allgemeinen Punkt bestimmen. Zunächst jedenfalls müssen wir die größtmögliche Anzahl von Übergewichtsstellen erzielen. Im Falle $i_m = j_r$ (der Fall $i_m = \alpha_t$ liefert wesentlich das Gleiche) haben wir daher $t' = n - j_r + 1$ zu nehmen, so daß in (7) auftreten $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \ldots, \alpha_{n-j_r+1} = n - j_r + 1$; ferner muß $j_r = r$ sein, so daß also $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_r = r$ ist. Wir haben mithin [2])

$$a_{j_1} = a_1, \ldots, a_{j_r} = a_r,$$
$$b_{\alpha_1} = b_1 = a_{\zeta_1} = a_n, \; b_2 = a_{n-1}, \ldots, b_{n-r+1} = a_{\zeta_{n-r+1}} = a_r.$$

Wählen wir daher die Anordnung der $i_1, \ldots, i_m$ in (7) entsprechend der Anordnung der Indizes in $a_0, b_0, \ldots, b_{n-r}, a_{r-1}, b_{n-r+1}, a_r$ (vgl. Nr. **3.** 2), so fällt bei Anwendung unserer Regel kein Glied in (7) weg. Wir erhalten also wirklich $n+3$ Übergewichtsstellen. Die sodann noch erforderliche Anzahl von Vorzeichenwechseln erhalten wir für

$$\text{sign } a_\varrho = (-1)^\varrho, \quad \varrho = 1, \ldots, r \text{ und } a_0 = b_0 > 0, \text{ sowie}$$

$$\text{sign } b_\nu = \text{sign } (a_{n-\nu+1}) \cdot \text{sign } (n-\nu+1) = (-1)^\nu, \quad \nu = n-r, n-r-1, \ldots, 1.$$

Bei dieser Festsetzung liefern irgend zwei benachbarte a_ϱ einen Vorzeichenwechsel, ebenso benachbarte b_ν, *ausgenommen höchstens* b_{n-r} und b_{n-r+1}, da wir über das Vorzeichen von $b_{n-r+1} = a_{\tilde{r}}$ (und nur über dieses) nicht frei verfügen können. Ein Vorzeichenwechsel zwischen b_{n-r} und b_{n-r+1} liegt dann und nur dann vor, wenn $-(-1)^{n-r} = (-1)^r \text{ sign } (\tilde{r})$, d. h. sign $(\tilde{r}) = (-1)^{n+1}$; alsdann ist die Mindestordnung gewiß $n+1$. Man erkennt ferner, daß im Falle sign $(\tilde{r}) = (-1)^n$ auch bei jeder anderen Festsetzung über die Vorzeichen der $a_0, \ldots, a_r, b_0, \ldots, b_{n-r+1}$ nur die Mindestordnung n erhalten werden kann. Wir haben also:

Unsere Mindestordnung eines allgemeinen *singulären Punktes ist* $n+1$, *wenn sign* $(\tilde{r}) = (-1)^{n+1}$ *für wenigstens ein r mit* $1 \leqq r \leqq n$ *gilt.* (Bei gegebenem n ist das der Fall für insgesamt $2^n - 1$ (allgemeine) Typen.) *Hingegen ist die Mindestordnung gleich n, wenn sign* $(\tilde{r}) = (-1)^n$ *für* alle *r mit* $1 \leqq r \leqq n$. (Bei gegebenem n ist das der Fall für genau einen (allgemeinen) Typus.)

3. 3. 2. Für einen speziellen d. h. *differenzierbaren Punkt* ist die vermittelnde nicht-signierte Permutation $(\zeta) = (1, 2, \ldots, n)$. Bei Anwendung unserer Regel sind daher keinerlei Streichungen vorzunehmen, d. h. es können gleichzeitig alle j_ϱ bezüglich (a) *und* alle α_τ bezüglich (b) zu Übergewichtsindizes gemacht werden. Für die Gewinnung der maximalen, mit Hilfe von Übergewichtsstellen gelieferten Nullstellenanzahl ist es daher hinreichend, $(i_1, \ldots, i_m) = (0, 0, 1, 1, \ldots, n, n)$ zu setzen und diese $2n+2$ Indizes sämtlich als Übergewichtsindizes bezüglich (a) bzw. (b) anzunehmen. Die größte erreichbare Anzahl von, diesen Übergewichtsstellen entsprechenden, Nullstellen von $f^+(s)$ und $f^-(s)$ zusammengenommen hängt dann wesentlich ab von der signierten Permutation [2]) $(\tilde{\zeta}) = (\tilde{1}, \tilde{2}, \ldots, \tilde{n})$. Wählen wir zunächst $(-1)^\nu a_\nu > 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, so hat $f^+(s)$ mindestens n Nullstellen, hingegen $f^-(s)$ mindestens soviele, als die Anzahl w_b der in (b) auftretenden Zeichenwechsel beträgt, wobei $b_0 = a_0 > 0$, $b_\nu = a_\nu \cdot \text{sign } (\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$, ist. Wegen $(-1)^\nu a_\nu > 0$ ist nun w_b gleich der Anzahl der Vorzeichen*folgen* in $(+1, \tilde{1}, \tilde{2}, \ldots, \tilde{n})$, also gleich $n - w(\tilde{\zeta})$, wobei $w = w(\tilde{\zeta})$ die Anzahl der Zeichen*wechsel* in $(+1, \tilde{1}, \ldots, \tilde{n})$ bedeutet. Man erkennt weiter, daß die so ermittelte, gesamte Mindestnullstellenanzahl nicht zunimmt, wenn die Vorzeichen der a_ν beliebig abgeändert werden. Liefert nämlich $\tilde{\nu}, \widetilde{\nu+1}$ eine Vorzeichenfolge, so liefern $a_\nu, a_{\nu+1}$ *und* $b_\nu, b_{\nu+1}$ beide einen Wechsel oder beide eine Folge. Liefert hingegen $\tilde{\nu}, \widetilde{\nu+1}$ einen Vorzeichenwechsel, so liefern $a_\nu, a_{\nu+1}$ und $b_\nu, b_{\nu+1}$ zusammen *stets* genau einen Wechsel. Die maximale Anzahl Nullstellen, die durch Übergewichtsstellen geliefert werden, erhält man daher dann und nur dann, wenn man für jedes Paar $\tilde{\nu}, \widetilde{\nu+1}$, welches eine Vorzeichenfolge liefert, einen Vorzeichenwechsel von $a_\nu, a_{\nu+1}$ und folglich auch von $b_\nu, b_{\nu+1}$ wählt. Jedem der übrigen Paare $\tilde{\nu}, \widetilde{\nu+1}$, das also einen Vorzeichenwechsel liefert, entspricht im ganzen *ein* Wechsel bei $a_\nu, a_{\nu+1}$ *und* $b_\nu, b_{\nu+1}$ also im ganzen *eine* Nullstelle; diese ist Nullstelle von $f^+(s)$ oder von $f^-(s)$, je nachdem man $a_\nu \cdot a_{\nu+1} > 0$ oder < 0 wählt. Zusammenfassung ergibt:

Ein differenzierbarer *singulärer Punkt, dessen Typus durch* $(\tilde{\zeta}) = (\tilde{1}, \ldots, \tilde{n})$ *definiert sei, besitzt eine Mindestordnung* $2n - w(\tilde{\zeta})$, *wobei* $w = w(\tilde{\zeta})$ *die Anzahl der Zeichenwechsel in* $(+1, \tilde{1}, \ldots, n)$ *bedeutet. Von den Schnittpunkten gehören je* $n - w$ *zur rechts- bzw. linksseitigen Umgebung des Punktes, während die noch übrigen* w *Schnittpunkte nach Belieben auf die beiden Umgebungen verteilt werden können.*

Eine entsprechende Untersuchung der weder allgemeinen noch speziellen Typen soll gesondert gegeben werden.

Schriftenverzeichnis.

Aubry, A. [1] Note sur les permutations, L'enseignement mathématique **19** (1917), S. 280—294; **20** (1918), S. 199—215.

Delvendahl, O. [1] Die Singularitäten der Elementarkurven, Journ. f. d. r. u. angew. Math. **182** (1940), S. 54—59.

Denk, F. [1] Über elementare Punkte höherer Ordnung auf Kurven im R_n, Sitz.-Ber. der phys.-med. Soz. Erlangen **67** (1935/36), S. 1—3.

Haupt, O. [1] Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung, Math. Ann. **108** (1933), S. 126—142. — [2] Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen, Monatshefte für Math. u. Phys. **40** (1933), S. 1—53. — [3] Strukturprobleme bei reellen Gebilden, Sitz.-Ber. der bayr. Ak. der Wiss. 1935, S. 183—188. — [4] Gestaltsprobleme bei reellen Gebilden, Monatshefte für Math. u. Phys. **43** (1936), S. 261—274. — [5] Zur Differentialgeometrie k-dimensionaler Gebilde im R_n, Journal f. d. r. u. angew. Math. **176** (1937), S. 95 ff. — [6] Linear-ordnungssinguläre Punkte ebener und räumlicher Bogen, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., Jahrg. 1939, S. 253—263. — [7] Geometrische Ordnungen, Jahresber. d. D. Math. Vereinig. **49** (1939), S. 190—207. — [8] Über die gewöhnlich -differenzierbaren Punkte der Bogen n-ter Ordnung im R_n, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., Jahrg. 1934, S. 191—193.

Hjelmslev, J. [1] Introduction à la théorie des suites monotones, Oversigt over det kgl. danske videnskabernes selskabs forhandlinger 1914, S. 1—74. — [2] Die graphische Geometrie, Förhandl. ättonde skandinav. Matematikerkongr., Stockholm 1934.

Linsman, M. [1] Sur les singularités des courbes élémentaires en géométrie finie. Première note, Bull. Acad. Roy. Belg. Classe des sciences (5) **22** (1936), S. 688—698; Deuxième note, ebenda, S. 873—884.

Pólya, G. u. G. Szegö. [1] Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis **2**, Berlin 1925.

Sauter, J. [1] Zur Theorie der Bogen n-ter (Realitäts-)Ordnung im projektiven R_n. Erste Mitteilung, Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 507—536.

Scherk, P. [1] Über reelle geschlossene Raumkurven vierter Ordnung, Diss. Göttingen 1936 = Math. Ann. **112** (1936), S. 743—766. — [2] Über differenzierbare Kurven und Bogen, Časopis pro pěstováni matematiky a fysiky. (Journal tchécoslovaque de mathématiques et de physique) **66** (1936/37), S. 165—191.

Staudt, Chr. v. [1] Geometrie der Lage, Nürnberg 1847.

Vahlen, Th. [1] Descartes' Zeichenregel und interszendente Polynome, Deutsche Mathematik **4** (1939), S. 58—59.

Eingegangen 10. August 1939.

Über die sich selbst assoziierten Charaktere der symmetrischen Gruppe.

Von *Zyoiti Suetuna* in Tokyo.

1. Die Charaktere der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ vom Grade n lassen sich nach Frobenius bekanntlich folgendermaßen angeben [1]): Ist (ϱ) die der Zerlegung

$$n = \alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \ldots \geqq 0)$$

entsprechende Klasse konjugierter Elemente aus $\mathfrak{S}_n$, so sei der Koeffizient von $x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_n^{\mu_n}$ im Polynom

$$(x_1 + \cdots + x_n)^{\alpha} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\beta} \cdots \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

mit $[\mu_1, \ldots, \mu_n]\chi_\mu(\varrho)$ bezeichnet, wobei $[\mu_1, \ldots, \mu_n]$ das Vorzeichen des Differenzenproduktes $\prod_{i>j} (\mu_i - \mu_j)$ bedeutet. Diese Funktionen χ_μ sind die einfachen Charaktere von $\mathfrak{S}_n$. Wenn dabei $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$ ist, so sei

$$\lambda_1 = \mu_1, \ \lambda_2 = \mu_2 - 1, \ldots, \ \lambda_n = \mu_n - n + 1.$$

Alsdann ist

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \ \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n.$$

Im folgenden sei somit zur Abkürzung

$$\chi_\mu = \{\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_1\}$$

gesetzt. Falls etwa $\lambda_i = \cdots = \lambda_1 = 0$ ist, so schreiben wir auch

$$\{\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_1\} = \{\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_{i+1}\}.$$

Ist nun $\mathfrak{A}_n$ die in $\mathfrak{S}_n$ enthaltene alternierende Gruppe vom Grade n, so zerfällt ein einfacher Charakter χ von $\mathfrak{S}_n$ in $\mathfrak{A}_n$ auf folgende Weise [2]): Ist χ von $\chi\hat{\chi}$ verschieden, wo $\hat{\chi}$ den Nicht-Hauptcharakter von $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n$, nämlich den Charakter $\{1, 1, \ldots, 1\}$ bezeichnet, so zerfällt χ in $\mathfrak{A}_n$ nicht. Die assoziierten Charaktere χ, $\chi\hat{\chi}$ sind natürlich in $\mathfrak{A}_n$ gleich. Ist dagegen $\chi = \chi\hat{\chi}$, so zerfällt dieser sich selbst assoziierte Charakter in $\mathfrak{A}_n$ in zwei zueinander konjugierte Bestandteile. Frobenius hat gezeigt [1]), daß zwei Charaktere $\{\varkappa_n, \varkappa_{n-1}, \ldots, \varkappa_1\}$, $\{\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_1\}$ dann und nur dann assoziiert sind, wenn die Zahlen

$$\varkappa_1, \varkappa_2 + 1, \ldots, \varkappa_n + n - 1, \quad n - \lambda_n, \ldots, 2n - 1 - \lambda_1$$

in ihrer Gesamtheit gleich $0, 1, 2, \ldots, 2n - 1$ sind. Ein Charakter $\{\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_1\}$ ist deshalb dann und nur dann sich selbst assoziiert, wenn die Zahlen

---

[1]) G. Frobenius, Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, Berliner Sitzungsber. 1900, 516—534.

[2]) G. Frobenius, Über die Charaktere der alternierenden Gruppe, Berliner Sitzungsber. 1901, 303—315.

$$\lambda_1,\ \lambda_2+1,\ \ldots,\ \lambda_n+n-1,\quad n-\lambda_n,\ \ldots,\ 2n-1-\lambda_1$$

in ihrer Gesamtheit gleich $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$ sind.

Im folgenden soll zunächst die Anzahl der sich selbst assoziierten Charaktere von $\mathfrak{S}_n$ bestimmt werden. Danach werden wir die Gestalt dieser Charaktere rekursiv angeben. Die Anzahl der selbstassoziierten Charaktere von $\mathfrak{S}_n$ ist bekanntlich gleich der Anzahl der Zerlegungen von n in verschiedene ungerade Zahlen, und durch diese Zerlegungen lassen sich die selbstassoziierten Charaktere kennzeichnen [3]). Die Angabe der Zerlegungen in verschiedene ungerade Zahlen ist nun aber, wie ich glaube, gar nicht einfach; meine Absicht ist demgemäß, die selbstassoziierten Charaktere vielmehr durch gewöhnliche Partitionen zu charakterisieren.

2. Es sei m ganz $\geqq 2$. Die Anzahl der Lösungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ derart, daß

$$n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m,\quad 0\leqq\lambda_1\leqq\cdots\leqq\lambda_m$$

und die Zahlen

$$\lambda_1,\ \lambda_2+1,\ \ldots,\ \lambda_m+m-1,\quad m-\lambda_m,\ \ldots,\ 2m-1-\lambda_1$$

in ihrer Gesamtheit gleich $0, 1, 2, \ldots, 2m-1$ sind, sei mit $F(n, m)$ bezeichnet. Natürlich ist dann $F(n, n)$ die Anzahl der sich selbst assoziierten Charaktere von $\mathfrak{S}_n$. Wir setzen

$$F(n, m)=0 \quad \text{für} \quad n<0,\quad F(0, m)=F(1, m)=1.$$

Es läßt sich sofort zeigen, daß

$$F(2, 2)=0,\quad F(3, 2)=F(4, 2)=1,\quad F(5, 2)=F(6, 2)=\cdots=0.$$

Satz 1. *Für $m\geqq 3$ gilt*

$$F(n, m)=F(n, m-1)+F(n+1-2m, m-1).$$

Beweis. Es sei

$$n=\lambda_1+\cdots+\lambda_m,\quad 0\leqq\lambda_1\leqq\cdots\leqq\lambda_m,$$

und die Zahlen

$$\lambda_1,\ \lambda_2+1,\ \ldots,\ \lambda_m+m-1,\quad m-\lambda_m,\ \ldots,\ 2m-1-\lambda_1$$

seien in ihrer Gesamtheit gleich $0, 1, 2, \ldots, 2m-1$. Alsdann ist entweder $\lambda_1=0$ oder $m-\lambda_m=0$. Falls $\lambda_1=0$ ist, so sind die Zahlen

$$\lambda_2,\ \lambda_3+1,\ \ldots,\ \lambda_m+m-2,\quad m-1-\lambda_m,\ \ldots,\ 2m-3-\lambda_2$$

in ihrer Gesamtheit gleich $0, 1, 2, \ldots, 2m-3$. Die Anzahl solcher Lösungen ist daher gleich $F(n, m-1)$. Falls dagegen $\lambda_m=m$ ist, so ist

$$\lambda_1\geqq 1,\ (\lambda_1-1)+\cdots+(\lambda_{m-1}-1)=n+1-2m,$$

und die Zahlen

$$\lambda_1-1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{m-1}+m-3,\quad m-\lambda_{m-1},\ \ldots,\ 2m-2-\lambda_1$$

sind in ihrer Gesamtheit gleich $0, 1, 2, \ldots, 2m-3$. Die Anzahl solcher Lösungen ist ersichtlich gleich $F(n+1-2m, m-1)$. Damit ist unser Satz bewiesen.

Aus diesem Satz 1 ergibt sich sofort, daß

$$F(n, n)=F(n, n-l) \qquad \text{für } n\geqq 2l.$$

Also ist für $m\geqq 2$

---

[3]) Außer Frobenius a. a. O. 1), 2), vgl. auch W. Specht, Darstellungstheorie der alternierenden Gruppe, Math. Zeitschr. **43** (1938), 553—572; insbes. S. 561.

(1) $\qquad F(n, n) = F(n, m)$, falls $n = 2m$ oder $2m - 1$ ist.

Außerdem ist $(m \geqq 2)$

(2) $\qquad F(m^2 + l, m) = 0 \qquad$ für alle $l \geqq 1$.

In der Tat gilt dies zunächst für $m = 2$. Falls (2) somit für ein m gilt, so ergibt sich aus Satz 1

$$F((m+1)^2 + l, m+1) = F((m+1)^2 + l, m) + F(m^2 + l, m) = 0.$$

Nach (1) und (2) erhalten wir leicht folgende Tabelle:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$F(n, n)$	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$F(n, n)$	5	5	5	6	7	8	8	9	11	11	12	14	16	17	18

3. Es sei $\{\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_1\}$ ein einfacher Charakter von $\mathfrak{S}_n$. Ist dabei

$$\lambda_{n-r+1} \geqq 1, \ \lambda_{n-r} = \cdots = \lambda_1 = 0,$$

so ist der zu $\{\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_{n-r+1}\}$ assoziierte Charakter ersichtlich der folgende:

$$\{\overbrace{r, \ldots, r}^{\lambda_{n-r+1}}, \overbrace{r-1, \ldots, r-1}^{\lambda_{n-r+2} - \lambda_{n-r+1}}, \ldots, \overbrace{1, \ldots, 1}^{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\}.$$

Ist also

(3) $\qquad \{\lambda_n, \ldots, \lambda_1\} = \{\overbrace{\alpha_l, \ldots \alpha_l}^{k_l}, \overbrace{\alpha_{l-1}, \ldots, \alpha_{l-1}}^{k_{l-1}}, \ldots, \overbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}^{k_1}\}$,

wobei $\alpha_l > \cdots > \alpha_1 > 0$, $k_i > 0$, so ist der zu diesem Charakter assoziierte der folgende:

$$\{\overbrace{k_l + \cdots + k_1, \ldots, k_l + \cdots + k_1}^{\alpha_1}, \overbrace{k_l + \cdots + k_2, \ldots, k_l + \cdots + k_2}^{\alpha_2 - \alpha_1}, \ldots, \overbrace{k_l, \ldots, k_l}^{\alpha_l - \alpha_{l-1}}\}.$$

Daher ist der Charakter (3) dann und nur dann sich selbst assoziiert, wenn

(4) $\qquad \alpha_1 = k_l, \ \alpha_2 - \alpha_1 = k_{l-1}, \ldots, \ \alpha_l - \alpha_{l-1} = k_1.$

Die sich selbst assoziierten Charaktere von $\mathfrak{S}_n$ sind für $n \leqq 8$ folgende:

$n = 3$: $\{2, 1\}$. $\qquad n = 4$: $\{2, 2\}$. $\qquad n = 5$: $\{3, 1, 1\}$.

$n = 6$: $\{3, 2, 1\}$. $\qquad n = 7$: $\{4, 1, 1, 1\}$. $\qquad n = 8$: $\{3, 3, 2\}$, $\{4, 2, 1, 1\}$.

Satz 2. *Ist $\{s, \ldots\}$ ein sich selbst assoziierter Charakter von $\mathfrak{S}_n$, so ist*

$$s \leqq \frac{n+1}{2}.$$

Beweis. Ist $\{s, \ldots\} = \{s, s, \ldots\}$, so ist natürlich $2s \leqq n$. Ist nun

$$\{s, \ldots\} = \{s, s - t, \ldots\} \qquad \text{mit } t > 0, \ s - t > 1,$$

so ist

$$\{s, \ldots\} = \{s, s - t, \ldots, \overbrace{1, \ldots, 1}^{t}\},$$

folglich $s + (s - t) + t = 2s \leqq n$. Ist endlich

$$\{s, \ldots\} = \{s, \overbrace{1, \ldots, 1}^{s-1}\},$$

so ist $2s - 1 = n$, d. h. $2s = n + 1$.

Satz 3. *Es sei $r \geqq 2$ und $n = 2r - 1$ oder $2r$. Der Charakter*

$$(5) \qquad \begin{array}{ll} \{r, \overbrace{1, \ldots, 1}^{r-1}\} & \text{für } n = 2r - 1, \\ \{r, 2, \overbrace{1, \ldots, 1}^{r-2}\} & \text{für } n = 2r \end{array}$$

ist sich selbst assoziiert. Für $n = 2r - 1$ ist der Charakter

$$(6) \qquad \{r - a, a + 1, 3, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a-2}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{r-2a-1}\},$$

wobei $2 \leqq a \leqq \dfrac{r-1}{2}$, sich selbst assoziiert. Für $n = 2r$ ist auch der Charakter

$$(7) \qquad \{r - a, a + 2, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{r-2a-2}\},$$

wobei $1 \leqq a \leqq \dfrac{r}{2} - 1$, sich selbst assoziiert.

Alle anderen sich selbst assoziierten Charaktere haben die Gestalt:

$$\{r - a, b, \ldots\} \quad \textit{mit} \quad b \leqq a.$$

Beweis. 1) Es sei $n = 2r - 1$. Der Charakter (5) ist ersichtlich der einzige von der Gestalt $\{r, \ldots\}$. Also sei $a \geqq 1$, und

$$\{r - a, b, \overbrace{\ldots}^{b-2}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{r-a-b}\}$$

sei sich selbst assoziiert. Die Summe der $b - 2$ Zahlen in der Mitte ist gleich

$$n - (r - a + b + r - a - b) = 2a - 1,$$

und es gilt ($b \geqq 3$)

$$2(b - 2) \leqq 2a - 1, \quad \text{d. h.} \quad b \leqq a + 1.$$

Der Charakter (6) ist der einzige von der Gestalt $\{r - a, a + 1, \ldots\}$.

2) Es sei $n = 2r$. Der Charakter (5) ist auch hier ersichtlich der einzige von der Gestalt $\{r, \ldots\}$. Deshalb sei $a \geqq 1$, und

$$\{r - a, b, \overbrace{\ldots}^{b-2}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{r-a-b}\}$$

sei sich selbst assoziiert. Die Summe der $b - 2$ Zahlen in der Mitte ist diesmal gleich $2a$, und es ist ($b \geqq 3$)

$$2(b - 2) \leqq 2a, \quad \text{d. h.} \quad b \leqq a + 2.$$

Der Charakter (7) ist der einzige von der Gestalt $\{r - a, a + 2, \ldots\}$.

Ein Charakter der Gestalt $\{r - a, a + 1, \ldots\}$ kann nicht sich selbst assoziiert sein.

4. Nunmehr gilt der folgende

Satz 4. *Es sei $r \geqq 2$ und $n = 2r - 1$ oder $2r$. Ferner sei $3 \leqq b \leqq a$, und*

$$\{r-a,\ b,\ \overbrace{\ldots,}^{b-2}\ \overbrace{1,\ldots,1}^{r-a-b}\}$$

sei sich selbst assoziiert. Dann ist die Summe der $b-2$ Zahlen in der Mitte gleich $2a-1$ oder $2a$. Diese Summe sei nun gleich $2(b-2)+m$, und

$$m=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m,\quad 0\leqq\mu_1\leqq\cdots\leqq\mu_m \tag{8}$$

sei eine Zerlegung von m, wobei unter den m Zahlen $\mu_1,\ldots,\mu_m$ genau s Zahlen von 0 verschieden sein sollen. Alsdann ist der Charakter von $\mathfrak{S}_n$

$$\{r-a,\ b,\ 2+\mu_m,\ 2+\mu_{m-1},\ldots,\ \overbrace{2,\ldots,2}^{b-s-2},\ \overbrace{1,\ldots,1}^{r-a-b}\},$$

wobei $b-2\geqq s$, $r\geqq a+b$, dann und nur dann sich selbst assoziiert, wenn der Charakter $\{\mu_m,\mu_{m-1},\ldots\}$ von $\mathfrak{S}_m$ sich selbst assoziiert ist.

Beweis. Zunächst sei $b-2>s$, $r>a+b$. Die Zerlegung (8) sei so geschrieben:

$$m=\overbrace{\alpha_l+\cdots+\alpha_l}^{k_l}+\cdots+\overbrace{\alpha_1+\cdots+\alpha_1}^{k_1},\quad \alpha_l>\cdots>\alpha_1>0.$$

Dann ist $k_l+\cdots+k_1=s$. Der zu

$$\{r-a,\ b,\ 2+\alpha_l,\ \ldots,\ 2+\alpha_1,\ \overbrace{2,\ldots,2}^{b-s-2},\ \overbrace{1,\ldots,1}^{r-a-b}\}$$

assoziierte Charakter von $\mathfrak{S}_n$ ist

$$\{r-a,\ b,\ \overbrace{2+s,\ldots,2+s}^{\alpha_1},\ldots,\ \overbrace{2+k_l,\ldots,2+k_l}^{\alpha_l-\alpha_{l-1}},\ \overbrace{2,\ldots,2}^{b-\alpha_l-2},\ \overbrace{1,\ldots,1}^{r-a-b}\}.$$

Daß unser Charakter sich selbst assoziiert ist, besagt, daß

$$\alpha_1=k_l,\quad \alpha_2-\alpha_1=k_{l-1},\ldots,\alpha_l-\alpha_{l-1}=k_1,$$

womit Satz 4 in diesem Falle bewiesen ist (vgl. (4)).

Wenn jedoch $r=a+b$ oder $b-2=s$ ist, so läßt sich der Satz in ähnlicher Weise beweisen.

Damit haben wir folgende sich selbst assoziierte Charaktere:

1) $n=2r-1$:

$$\{r,1,\ldots,1\},\qquad r\geqq 2.$$

$$\{r-a,\ a+1,\ 3,\ \overbrace{2,\ldots,2}^{a-2},\ 1,\ldots,1\},\qquad 2\leqq a\leqq\frac{r-1}{2}.$$

$$\{r-a,\ a,\ 4,\ 3,\ \overbrace{2,\ldots,2}^{a-4},\ 1,\ldots,1\},\qquad 4\leqq a\leqq\frac{r}{2}.$$

$$\{r-a,\ a-1,\ 5,\ 3,\ 3,\ \overbrace{2,\ldots,2}^{a-6},\ 1,\ldots,1\},\qquad 6\leqq a\leqq\frac{r+1}{2}.$$

$$\{r-a,\ a-2,\ 6,\ 3,\ 3,\ 3,\ \overbrace{2,\ldots,2}^{a-8},\ 1,\ldots,1\},\qquad 8\leqq a\leqq\frac{r}{2}+1.$$

. . . . . .

2) $n = 2r$:

$$\{r, 2, 1, \ldots, 1\}, \qquad r \geqq 2.$$

$$\{r-a, a+2, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a}, 1, \ldots, 1\}, \qquad 1 \leqq a \leqq \frac{r}{2}-1.$$

$$\{r-a, a, 4, 4, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a-4}, 1, \ldots, 1\}, \qquad 4 \leqq a \leqq \frac{r}{2}.$$

$$\{r-a, a-1, 5, 4, 3, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a-6}, 1, \ldots, 1\}, \qquad 6 \leqq a \leqq \frac{r+1}{2}.$$

$$\{r-a, a-2, 5, 5, 4, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a-7}, 1, \ldots, 1\}, \qquad 7 \leqq a \leqq \frac{r}{2}+1.$$

$$\{r-a, a-2, 6, 4, 3, 3, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a-8}, 1, \ldots, 1\}, \qquad 8 \leqq a \leqq \frac{r}{2}+1.$$

. . . . . .

Für $n = 2r-1$ bzw. $2r$ haben wir hiermit alle sich selbst assoziierten Charaktere von $\mathfrak{S}_n$ bis $n = 25$ bzw. 28.

Tokyo, 9. August 1939.

Eingegangen 28. August 1939

Untersuchungen über ungerade vollkommene Zahlen*).

Von *Hans-Joachim Kanold* in Breslau.

Bezeichnet man die Summe der Teiler einer positiven ganzen Zahl n, einschließlich 1 und n, mit $\sigma(n)$, so heißt n vollkommen, wenn $\sigma(n) = 2n$ ist. Über die ungeraden vollkommenen Zahlen herrscht noch völlige Unklarheit: Weder ist ein Beispiel einer solchen Zahl, noch ein Satz über ihre Existenz oder Nichtexistenz bekannt. Bekannt sind lediglich notwendige Bedingungen für die Struktur der Primfaktorenzerlegung einer ungeraden vollkommenen Zahl.

Schon Euler [1]) hat bewiesen, daß die Zerlegung die Gestalt $n = p^{\alpha} q_1^{2\beta_1} \cdots q_r^{2\beta_r}$ mit $p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$ hat. In der vorliegenden Arbeit werden in I einige Aussagen über Kreisteilungspolynome bewiesen; insbesondere wird ein Satz von Kronecker [2]) verschärft und auf neue Art hergeleitet. In Anwendung dieses Satzes ergibt sich in II, daß der größte in einer ungeraden vollkommenen Zahl n aufgehende Primteiler mindestens doppelt so groß ist wie der größte der um 1 vermehrten Exponenten in der Primzahlzerlegung von n. Das Ergebnis von III besagt, daß n durch t^4 teilbar ist, wenn t den größten gemeinsamen Teiler der um 1 vermehrten geraden Exponenten in der Primfaktorenzerlegung von n bedeutet. Hieraus ergeben sich in IV weitere notwendige Bedingungen für die Existenz ungerader vollkommener Zahlen; z. B. ist n nicht vollkommen, wenn alle um 1 vermehrten geraden Exponenten durch 9 teilbar sind.

I. Sätze über Kreisteilungspolynome.

Wir wollen unter dem m-ten Kreisteilungspolynom $F_m(x)$ jenes ganzzahlige, normierte, in bezug auf den Körper P der rationalen Zahlen unzerlegbare Polynom verstehen, dessen Wurzeln genau die primitiven m-ten Einheitswurzeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(m)}$ sind. Es ist also

$$F_m(x) = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \cdots (x - \varepsilon_{\varphi(m)}). \tag{1}$$

Betrachtet man $F_m(x)$ an allen ganzen rationalen Stellen x, so gilt nach Kronecker [3]): Ist r ein Primteiler vom $F_m(x)$, so ist entweder $r \mid m$ oder $r \equiv 1 \pmod m$. Es soll nun dieser Satz verschärft und auf andere Weise bewiesen werden.

(2) **Satz.** *Ist* $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \geqq 3$ *mit* $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ *und* x *eine ganze rationale Zahl, ist ferner* r *ein Primteiler von* $F_m(x)$, *so ist die Bedingung* $p_k \equiv 1 \pmod{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}}$ *notwendig dafür, daß* $r = p_k$, *und die Bedingung*

*) Teil einer von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau angenommenen Dissertation (D 2).

[1]) L. Euler, Opera posthuma I, S. 14—15; vgl. auch L. E. Dickson, History of the theory of numbers **1**, S. 19.

[2]) L. Kronecker, Gesammelte Werke **3**, 1, S. 281—292. Vgl. auch Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1888, S. 417—423.

[3]) Vgl. Fußnote [2]).

$p_k \not\equiv 1 \pmod{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}}$ *hinreichend dafür, daß* $r \equiv 1 \pmod{m}$ *ist. Ferner gilt: Im Falle* $p_k \mid F_m(x)$ *ist* $p_k^2 \nmid F_m(x)$.

Beweis. Es ist

$$(3) \qquad \frac{x^m - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1} = F_m(x) \cdot \prod_{d \mid m;\, d \neq 1,\, \neq m} F_d(x).$$

Setzt man $\frac{m}{p_\varkappa} = m_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$, so ist

$$(4) \qquad 1 + x + \cdots + x^{m-1} =$$
$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m_\varkappa - 1})(1 + x^{m_\varkappa} + x^{2m_\varkappa} + \cdots + x^{(p_\varkappa - 1)m_\varkappa}).$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$(5) \qquad 1 + x + x^2 + \cdots + x^{m_\varkappa - 1} = a_\varkappa,$$
$$1 + x^{m_\varkappa} + x^{2m_\varkappa} + \cdots + x^{(p_\varkappa - 1)m_\varkappa} = b_\varkappa,$$

so sieht man aus (3) und (4), daß

$$(6) \qquad F_m(x) \mid b_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

ist. Es sei nun

$$(7) \qquad r_\varkappa \mid b_\varkappa$$

und $r_\varkappa$ eine Primzahl. Dann ist

$$(8) \qquad x^m = x^{m_\varkappa p_\varkappa} \equiv 1 \pmod{r_\varkappa}.$$

Ist

$$(9) \qquad x^{m_\varkappa} \equiv 1 \pmod{r_\varkappa},$$

so ist $b_\varkappa \equiv p_\varkappa \pmod{r_\varkappa}$, anderseits wegen (7): $b_\varkappa \equiv 0 \pmod{r_\varkappa}$. Daraus folgt

$$(10) \qquad r_\varkappa = p_\varkappa,$$

weil $r_\varkappa$ und $p_\varkappa$ Primzahlen sind. Es ist dann

$$(11) \qquad p_\varkappa^2 \nmid b_\varkappa.$$

Wegen (9) und (10) ist nämlich $x^{m_\varkappa} = sp_\varkappa + 1$, also

$$b_\varkappa = 1 + (sp_\varkappa + 1) + \cdots + (sp_\varkappa + 1)^{p_\varkappa - 1} = p_\varkappa + Ap_\varkappa^2 \not\equiv 0 \pmod{p_\varkappa^2}.$$

Ist

$$(12) \qquad x^{m_\varkappa} \not\equiv 1 \pmod{r_\varkappa},$$

so folgt nach (8) und dem Fermatschen Satz:

$$(13) \qquad x^t \equiv 1 \pmod{r_\varkappa}, \text{ wenn } t = (r_\varkappa - 1, m_\varkappa p_\varkappa) \text{ ist.}$$

Es ist nun auf Grund von (12) $p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} \mid t$, also auch ein Teiler von $r_\varkappa - 1$:

$$(14) \qquad r_\varkappa \equiv 1 \pmod{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}} \text{ für } \varkappa = 1, \ldots, k.$$

Ist nun r ein Primteiler von $F_m(x)$, so erfüllt r nach (6), (10) und (14) je eine Bedingung aus den folgenden k Paaren von Bedingungen:

$$(15) \qquad \begin{array}{c} \text{Entweder } r = p_1 \text{ oder } r \equiv 1 \pmod{p_1^{\alpha_1}} \\ \vdots \\ \text{Entweder } r = p_k \text{ oder } r \equiv 1 \pmod{p_k^{\alpha_k}}. \end{array}$$

Weil $p_1, \ldots, p_k$ paarweise verschieden sind, kann dabei die erste Bedingung aus höchstens einem Paare erfüllt sein. Also bestehen für r nur folgende zwei Möglichkeiten:

(16) $r = p_\lambda$ und $r \equiv 1 \pmod{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}}$, wobei λ eine feste unter den Zahlen $1, \ldots, k$ ist und $\varkappa$ diese Zahlen durchläuft, aber $\varkappa \neq \lambda$ ist.

(17) $$r \neq p_\varkappa \text{ und } r \equiv 1 \pmod{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k).$$

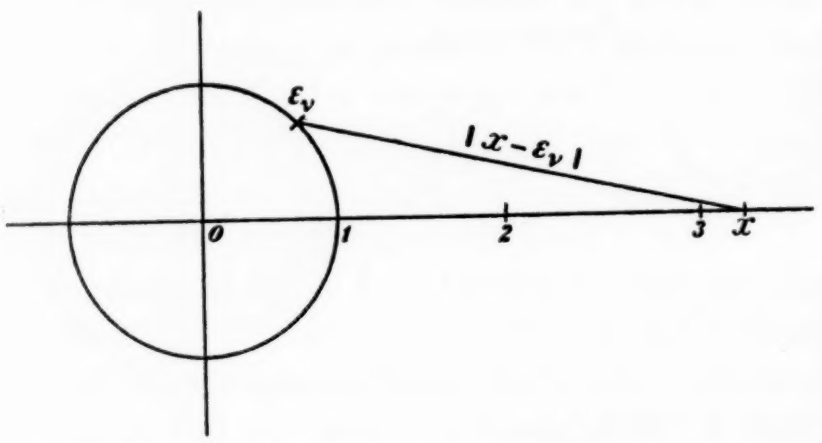
Wegen der Annahme $p_1 < \cdots < p_k$ kann (16) nur im Falle $\lambda = k$ eintreten. (16) und (17) nehmen daher folgende Gestalt an:

(18) $$r = p_k \text{ und } r \equiv 1 \pmod{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}},$$

(19) $$r \equiv 1 \pmod{m}.$$

Auf Grund von (6) und (11) kann ferner p_k^2 nicht Teiler von $F_m(x)$ sein. Damit ist (2) bewiesen.

Folgerung aus Satz (2): Soll $F_m(x)$ an der ganzen rationalen Stelle $x > 1$ keinen Primteiler besitzen, der $\equiv 1 \pmod{m}$ ist, so kann nur $p_k \mid F_m(x)$ sein, d. h., es ist



(20) $$F_m(x) = p_k.$$

Beispiel: $F_6(x) = x^2 - x + 1$.
$F_6(2) = 4 - 2 + 1 = 3$; $m = 6 = 2 \cdot 3$;
$p_k = 3 \equiv 1 \pmod 2$.

(21) **Satz.** *Für $m \geqq 3$ und $x \geqq 3$, x ganz rational, enthält $F_m(x)$ mindestens einen Primteiler, der $\equiv 1 \pmod m$ ist.*

Beweis. $F_m(x)$ ist, wenn x ganz rational ist, eine positive ganze rationale Zahl. Auf Grund von (1) gilt daher auch:

(22) $$F_m(x) = |x - \varepsilon_1| \cdot |x - \varepsilon_2| \cdots |x - \varepsilon_{\varphi(m)}|.$$

Wegen $x \geqq 3$ ist nun $|x - \varepsilon_\nu| > 2$ $(\nu = 1, \ldots, \varphi(m))$ (vgl. Zeichnung). Daraus folgt

(23) $$F_m(x) > 2^{\varphi(m)}.$$

Weil $\varphi(m) \geqq p_k - 1$, $2^{\varphi(m)} \geqq 2^{p_k - 1} \geqq p_k$ ist, so ergibt sich nach (23) und der Folgerung aus Satz (2) sofort die Behauptung von (21).

II. Eine Beziehung zwischen der größten in einer ungeraden vollkommenen Zahl aufgehenden Primzahl und dem größten bei der Primfaktorenzerlegung auftretenden Exponenten.

(1) **Satz.** *Ist $n = p^\alpha q_1^{2\beta_1} \cdots q_r^{2\beta_r}$ eine ungerade vollkommene Zahl* [4]*, so ist*

$$\operatorname{Max}(p, q_1, \ldots, q_r) > 2 \operatorname{Max}(\alpha + 1, 2\beta_1 + 1, \ldots, 2\beta_r + 1).$$

Beweis. Da für eine vollkommene Zahl (s. Einleitung)

(2) $$\sigma(n) = 2n$$

und nach Formeln der elementaren Zahlentheorie

(3) $$\sigma(n) = (1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha) \cdot \prod_{\varrho=1}^{r} (1 + q_\varrho + q_\varrho^2 + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho})$$

gilt, da ferner $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ [5]) ist, so folgt:

(4) $$\frac{1}{2}(1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha) \mid n$$

und

---

[4]) Vgl. Fußnote [1]).
[5]) Vgl. Fußnote [1]).

$$1 + q_\varrho + q_\varrho^2 + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho} \mid n \qquad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Es ist

$$(5) \qquad \frac{1}{2}(1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha) =$$

$$\frac{p+1}{2}(1 + p + p^2 + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}})(1 - p + p^2 - + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}).$$

Nach I, (3):

$$(6) \qquad \begin{aligned} &F_{\frac{\alpha+1}{2}}(p) \mid 1 + p + p^2 + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}; \\ &F_{\alpha+1}(p) \mid 1 - p + p^2 - + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}; \\ &F_{2\beta_\varrho+1}(q_\varrho) \mid 1 + q_\varrho + q_\varrho^2 + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho}. \end{aligned}$$

Auf Grund von I, (21) besitzt $F_{2\beta_\varrho+1}(q_\varrho)$ mindestens einen Primteiler, der $\equiv 1 \pmod{2\beta_\varrho + 1}$, also $\geqq 2(2\beta_\varrho + 1) + 1 > 2(2\beta_\varrho + 1)$ ist. Ist $\operatorname{Max}(\alpha, 2\beta_1, \ldots, 2\beta_r) = \alpha$, so ist $\alpha + 1 \geqq 3$, und, da $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ ist, auch $\frac{\alpha+1}{2} \geqq 3$. Es gibt dann, wieder nach I, (21), eine Primzahl q_λ so, daß

$$(7) \qquad q_\lambda \mid F_{\alpha+1}(p),\ q_\lambda \equiv 1 \pmod{\alpha + 1}$$

ist. Für diese Primzahl q_λ gilt

$$(8) \qquad q_\lambda \nmid F_{\frac{\alpha+1}{2}}(p),$$

weil $q_\lambda \mid F_{\alpha+1}(p)$ besagt:

$$(9) \qquad q_\lambda \mid p^{\frac{\alpha+1}{2}} + 1$$

und $q_\lambda \mid F_{\frac{\alpha+1}{2}}(p)$:

$$(10) \qquad q_\lambda \mid p^{\frac{\alpha+1}{2}} - 1.$$

Wegen (7) ist aber $q_\lambda \neq 2$, und daher können (9) und (10) nicht gleichzeitig bestehen. Es gibt deshalb eine Primzahl q_μ so, daß

$$(11) \qquad q_\mu \neq q_\lambda;\ q_\mu \mid F_{\frac{\alpha+1}{2}}(p);\ q_\mu \equiv 1 \left(\operatorname{mod} \frac{\alpha+1}{2}\right)$$

ist. Da $\frac{\alpha+1}{2}$ ungerade ist, so gilt auch:

$$(12) \qquad q_\mu \equiv 1 \pmod{\alpha + 1}.$$

Aus (7), (11) und (12) folgt, daß mindestens eine der beiden Zahlen q_λ, q_μ größer als $2(\alpha + 1)$ ist. Damit ist der Beweis des Satzes (1) zum Abschluß gebracht.

III. Eine Eigenschaft des größten gemeinsamen Teilers der um 1 vermehrten geraden Exponenten in der Primfaktorenzerlegung einer ungeraden vollkommenen Zahl.

(1) Satz. *Ist* $n = p^\alpha q_1^{2\beta_1} \cdots q_r^{2\beta_r}$

$$= \frac{p+1}{2}\left(1 + p + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)\left(1 - p + - \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right) \prod_{\varrho=1}^{r}(1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho})$$

eine ungerade vollkommene Zahl, und die beliebige ganze rationale Zahl t ein gemeinsamer Teiler aller Zahlen $2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, so ist mindestens t^4 ein Teiler von n.

Beweis. Es muß gezeigt werden: Ist l eine Primzahl und $l^k \mid 2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, so ist $l^{4k} \mid n$.

A. Zunächst wird bewiesen, daß $l^k \mid n$ ist.

Ist ein q_ϱ, z. B. $q_1 \equiv 1 \pmod{l}$, so ist $l^k \mid n$. Denn es ist

$$(2)\quad 1 + q_1 + q_1^2 + \cdots + q_1^{2\beta_1} = (1 + q_1 + q_1^2 + \cdots + q_1^{l^k-1})(1 + q_1^{l^k} + q_1^{2l^k} + \cdots) \mid n.$$

$$(3)\quad 1 + q_1 + q_1^2 + \cdots + q_1^{l^k-1}$$
$$= (1 + q_1 + \cdots + q_1^{l-1})(1 + q_1^l + \cdots + q_1^{(l-1)l}) \cdots (1 + q_1^{l^{k-1}} + \cdots + q_1^{(l-1)l^{k-1}}).$$

Da jede Klammer der rechten Seite von (3) wegen $q_1 \equiv 1 \pmod{l}$ den Teiler l enthält, so ist $l^k \mid n$. Ist nun

$$(4)\qquad q_\varrho \not\equiv 1 \pmod{l} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r),$$

so folgt nach I, Satz (2):

$$(5)\qquad p \equiv 1 \pmod{l} \text{ und } \prod_{\varrho=1}^{r} (1 + q_\varrho + q_\varrho^2 + \cdots + q_\varrho^{l^k-1}) = p^\xi,$$

wobei ξ eine gewisse positive ganze Zahl ist. Gilt für eine der Zahlen ϱ, z. B. für ν:

$$(6)\qquad l \mid 2\beta_\nu + 1 \quad \text{und} \quad s \mid 2\beta_\nu + 1,$$

wobei l und s voneinander verschiedene Primzahlen sind, so ergibt sich:

$$(7)\quad 1 + q_\nu + q_\nu^2 + \cdots + q_\nu^{2\beta_\nu} = (1 + q_\nu + q_\nu^2 + \cdots + q_\nu^{l-1})(1 + q_\nu^l + q_\nu^{2l} + \cdots + q_\nu^{(s-1)l})(\cdots)$$
$$= (1 + q_\nu + q_\nu^2 + \cdots + q_\nu^{s-1})(1 + q_\nu^s + q_\nu^{2s} + \cdots + q_\nu^{(l-1)s})(\cdots).$$

Da p nach (4) und (5) die einzige in n enthaltene Primzahl ist, die der Restklasse $1 \pmod{l}$ angehört, so folgt aus I, Satz (2):

$$(8)\qquad 1 + q_\nu + q_\nu^2 + \cdots + q_\nu^{l-1} = p^{\varkappa_1}.$$

Zu dieser Gleichung tritt eine zweite, die im Falle $q_\nu^s \not\equiv 1 \pmod{l}$ lautet:

$$(8')\qquad 1 + q_\nu^s + q_\nu^{2s} + \cdots + q_\nu^{(l-1)s} = p^{\varkappa_2}$$

und im Falle $q_\nu^s \equiv 1 \pmod{l}$:

$$(8'')\qquad 1 + q_\nu^s + q_\nu^{2s} + \cdots + q_\nu^{(l-1)s} = lp^{\varkappa_2}.$$

In beiden Fällen ist $\varkappa_2 > \varkappa_1$. Im Falle (8′) ist das selbstverständlich; im Falle (8″) ergibt es sich durch folgenden Schluß: Nach (6) sind l und s beide $\geqq 3$. Setzt man $1 + q_\nu + q_\nu^2 + \cdots + q_\nu^{ls-1} = y^3$, wobei y eine reelle Zahl > 1, aber nicht notwendig ganz ist, so ist nach (8) und (8″): $p^{\varkappa_1} < y$, $lp^{\varkappa_2} > y^2$ und also $lp^{\varkappa_2 - \varkappa_1} > y > 1$. Wäre $\varkappa_2 < \varkappa_1$, so wäre, weil $p > l$ ist auf Grund von (5), $lp^{\varkappa_2 - \varkappa_1} = \dfrac{l}{p^{\varkappa_1 - \varkappa_2}} < 1$, was der obigen Ungleichung widerspricht. Wäre $\varkappa_1 = \varkappa_2$, so würde sich $l > y$ ergeben, was aber (8) und $p^{\varkappa_1} < y$ widerspricht. Aus (8) ergibt sich $q_\nu^l \equiv 1 \pmod{p}$ und daraus auf Grund von (7) und $\varkappa_1 < \varkappa_2$:

$$(9)\qquad p \mid 1 + q_\nu^l + q_\nu^{2l} + \cdots + q_\nu^{(s-1)l} \equiv s \pmod{p},$$

also $p \mid s$ und, weil p und s Primzahlen sind:

$$(10)\qquad s = p.$$

Dieses Ergebnis besagt nun, daß $\prod_{\varrho=1}^{r} (1 + q_\varrho + q_\varrho^2 + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho})$ nur in Klammern zerfällt, die entweder aus l oder p Summanden bestehen. Nach (4), (5) und I, (2) folgt daraus, daß dieses Produkt als Primteiler nur p und Zahlen der Restklasse $1 \pmod{p}$ enthalten kann. Es sei jetzt

$$q_\lambda \mid \frac{p+1}{2};\ p \equiv -1 \pmod{q_\lambda}. \tag{11}$$

Dann ist $q_\lambda \neq p$, $q_\lambda \not\equiv 1 \pmod{p}$, also:

$$q_\lambda \nmid \prod_{\varrho=1}^{r} (1 + q_\varrho + q_\varrho^2 + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho}) \tag{12}$$

und daraus

$$q_\lambda^{2\beta_\lambda} \mid \frac{p+1}{2}\left(1 + p + p^2 + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)\left(1 - p + p^2 - + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right). \tag{13}$$

Wäre $q_\lambda^2 \mid \frac{p+1}{2}$, so ergäbe sich nach (5):

$$1 + q_\lambda + q_\lambda^2 + \cdots + q_\lambda^{l-1} = p^{\varkappa_\lambda} \equiv \pm 1 \pmod{q_\lambda^2}. \tag{14}$$

Die linke Seite von (14) ist $\equiv 1 + q_\lambda \pmod{q_\lambda^2}$, die rechte $\equiv \pm 1 \pmod{q_\lambda^2}$. Das liefert einen Widerspruch. $\frac{p+1}{2}$ enthält daher nur Primteiler in der ersten Potenz, d. h.

$$\frac{p+1}{2} = q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \cdots q_{\lambda_\sigma} \text{ oder } p \equiv -1 \pmod{q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \cdots q_{\lambda_\sigma}}. \tag{15}$$

Auf Grund von (13) und (15):

$$q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \cdots q_{\lambda_\sigma} \mid 1 - p + p^2 - + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv \frac{\alpha+1}{2} \pmod{q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \cdots q_{\lambda_\sigma}}. \tag{16}$$

Es ist daher

$$q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \cdots q_{\lambda_\sigma} \mid \frac{\alpha+1}{2}. \tag{17}$$

Nach II, (6) ist $F_{\frac{\alpha+1}{2}}(p) \mid n$. Nach I, (21) besitzt nun $F_{\frac{\alpha+1}{2}}(p)$ mindestens einen Primteiler q_μ, der $\equiv 1 \left(\mod \frac{\alpha+1}{2}\right)$, also nach (17) auch $\equiv 1 \pmod{q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \cdots q_{\lambda_\sigma}}$ ist. Nach (5) und (15) ist mit einer gewissen positiven ganzen Zahl $\varkappa_\mu$:

$$1 + q_\mu + q_\mu^2 + \cdots + q_\mu^{l-1} = p^{\varkappa_\mu} \equiv \pm 1 \pmod{q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \cdots q_{\lambda_\sigma}}; \tag{18}$$

anderseits ist wegen $q_\mu \equiv 1 \pmod{q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \cdots q_{\lambda_\sigma}}$:

$$1 + q_\mu + q_\mu^2 + \cdots + q_\mu^{l-1} \equiv l \pmod{q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \cdots q_{\lambda_\sigma}}. \tag{19}$$

(18) und (19) liefern

$$l \equiv \pm 1 \pmod{q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \cdots q_{\lambda_\sigma}} \text{ oder } q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \cdots q_{\lambda_\sigma} \mid l^2 - 1. \tag{20}$$

Mit Hilfe von (15) kann man dafür auch schreiben:

$$\frac{p+1}{2} \mid l^2 - 1. \tag{21}$$

Nach (5) und $p \equiv 1 \pmod 4$ [6]) ist

$$p \equiv 1 \pmod{4l};\ p = 4cl + 1;\ \frac{p+1}{2} = 2cl + 1. \tag{22}$$

Auf Grund von (21) und (22) ist $l^2 - 1 = f \cdot \frac{p+1}{2} = f(2cl+1)$. Für f ergibt sich daraus die Bedingung: $f \equiv -1 \pmod l$; $f \geqq l - 1$. Das liefert

[6]) Vgl. Fußnote [1]).

$$(23) \qquad l^2 - 1 = (l+1)(l-1) = f(2cl+1) \geqq (l-1)(2cl+1).$$

Da $2cl + 1 > l + 1$ ist, so stellt (23) einen Widerspruch dar. Es ist somit bewiesen, daß $l^k \mid n$ sein muß.

B. Es soll nun gezeigt werden, daß auch $l^{2k} \mid n$ ist.

Die Annahme (4) hat zu einem Widerspruch geführt. Wir können im folgenden daher voraussetzen, daß ein q_ϱ, z. B. $q_1 \equiv 1 \pmod{l}$ ist.

Wir unterscheiden zwei Fälle: (α) $k > 1$; (β) $k = 1$.

(α) $k > 1$. Es ist $l^k \mid 2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ nach Voraussetzung. Wegen $q_1 \equiv 1 \pmod{l}$ gilt

$$(24) \quad l^k \mid (1 + q_1 + q_1^2 + \cdots + q_1^{l-1})(1 + q_1^l + q_1^{2l} + \cdots + q_1^{(l-1)l}) \cdots \\ \cdots (1 + q_1^{l^{k-1}} + q_1^{2l^{k-1}} + \cdots + q_1^{(l-1)l^{k-1}}) \mid n.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(25) \quad 1 + q_1 + q_1^2 + \cdots + q_1^{l-1} = a \quad \text{und} \quad 1 + q_1^l + q_1^{2l} + \cdots + q_1^{(l-1)l} = b,$$

so enthält a nach I, (21) einen Primteiler, der $\equiv 1 \pmod{l}$ ist. Dieser Primteiler kann nicht zugleich Teiler von b sein. b ist aber auch durch mindestens eine Primzahl teilbar, die der Restklasse 1 (mod l) angehört. Das Produkt $a \cdot b$ enthält daher mindestens zwei verschiedene Primteiler, die $\equiv 1 \pmod{l}$ sind. Unter den Zahlen $q_2, q_3, \ldots, q_r$ muß es also mindestens eine geben, die $\equiv 1 \pmod{l}$ ist. Sei $q_2 \equiv 1 \pmod{l}$. Dann folgt

$$(26) \quad l^k \mid (1 + q_2 + q_2^2 + \cdots + q_2^{l-1})(1 + q_2^l + q_2^{2l} + \cdots + q_2^{(l-1)l}) \cdots \\ \cdots (1 + q_2^{l^{k-1}} + q_2^{2l^{k-1}} + \cdots + q_2^{(l-1)l^{k-1}}) \mid n.$$

Aus (24) und (26) ergibt sich: $l^{2k} \mid n$.

(β) $k = 1$. Nehmen wir an, es wäre $l^{2k} \nmid n$; dann würde dies in dem vorliegenden Falle besagen:

$$(27) \qquad l \mid n; \; l^2 \nmid n.$$

Das heißt, daß $l = p$ sein muß [7]). Wegen $q_1 \equiv 1 \pmod{l}$ ist

$$(28) \qquad l \mid 1 + q_1 + q_1^2 + \cdots + q_1^{l-1} \mid n.$$

$1 + q_1 + q_1^2 + \cdots + q_1^{l-1}$ besitzt wieder nach I, (21) mindestens einen Primteiler $q_2 \equiv 1 \pmod{l}$. Es ist

$$(29) \qquad l \mid 1 + q_2 + q_2^2 + \cdots + q_2^{l-1} \mid n.$$

(28) und (29) liefern einen Widerspruch gegen die Annahme (27). Es ist damit die Behauptung $l^{2k} \mid n$ bewiesen.

C. Um zu zeigen, daß auch $l^{3k} \mid n$ ist, unterscheiden wir drei Fälle:

(α) $k > 2$; (β) $k = 2$; (γ) $k = 1$.

(α) $k > 2$. Wir betrachten Formel (24), die auch hier gilt. Wegen $k \geqq 3$ ist nun

$$(30) \qquad 1 + q_1^{l^2} + q_1^{2l^2} + \cdots + q_1^{(l-1)l^2} = c \mid n.$$

Benutzen wir die Abkürzungen (25), so können wir durch dieselben Schlüsse wie oben (vgl. im Anschluß an (25)) sagen: Das Produkt $a \cdot b \cdot c$ enthält mindestens drei verschiedene Primteiler, die $\equiv 1 \pmod{l}$ sind. Unter den Zahlen $q_2, q_3, \ldots, q_r$ gibt es daher mindestens zwei, die $\equiv 1 \pmod{l}$ sind. Seien dies q_2 und q_3. Für q_2 und q_3 gelten Formeln, die sich von (24) nur durch andere Indizes unterscheiden. Es ist deshalb $l^{3k} \mid n$.

(β) $k = 2$. Es ist $l^2 \mid 2\beta_\varrho + 1$, d. h.

---

[7]) Vgl. Fußnote [1]).

(31) $$2\beta_\varrho \geqq 8 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

Wir wissen bereits nach B:

(32) $$l^4 \mid n.$$

$l^{3k} \mid n$ heißt in unserem Falle: $l^6 \mid n$. Ist nun l eine der Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_r$, so ist wegen (31) $l^8 \mid n$, die Behauptung also bewiesen. Ist $l = p$, $q_1 \equiv 1 \pmod{l}$, so gilt, wie im Falle B, (α), daß das Produkt $a \cdot b$ mindestens zwei verschiedene Primteiler der Restklasse 1 (mod l) enthält. Diese sind beide ungleich p. Es gilt deshalb $q_2 \equiv 1 \pmod{l}$ und $q_3 \equiv 1 \pmod{l}$. Daraus folgt wieder wie im vorigen Falle: $l^{3k} \mid n$.

(γ) $k = 1$. Unsere Behauptung lautet: $l^3 \mid n$. Wir unterscheiden die beiden Unterfälle 1. $l > 3$ und 2. $l = 3$.

1. $l > 3$. Weil $l \mid 2\beta_\varrho + 1$ und $l \geqq 5$ ist, folgt

(33) $$2\beta_\varrho \geqq 4 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Ist l enthalten in $q_1 q_2 \cdots q_r$, so ist nach (33) $l^4 \mid n$. Ist $l = p$, so ist

(34) $$p^\alpha = l^\alpha \mid n;\ \alpha \equiv 1 \pmod 4\ ^8).$$

Auf Grund von B ist $l^2 \mid n$. Nach (34) folgt: $l^5 \mid n$.

2. $l = 3$. Wegen $p \equiv 1 \pmod 4$ [9]) ist $p \neq 3$. Nehmen wir an, es wäre $3^3 \nmid n$. Dann hätte n die Gestalt

$$(35)\quad n = p^\alpha \cdot 3^2 \cdot q_2^{2\beta_2} \cdot q_3^{2\beta_3} \cdots q_r^{2\beta_r} = \frac{p+1}{2}\left(1 + p + p^2 + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)$$

$$\cdot \left(1 - p + p^2 - + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right) \cdot (1 + 3 + 3^2) \cdot \prod_{\varrho=2}^{r} (1 + q_\varrho + q_\varrho^2 + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho})$$

$$\text{mit} \qquad 3 \mid 2\beta_\varrho + 1 \qquad (\varrho = 2, 3, \ldots, r).$$

Es ist $1 + 3 + 3^2 = 13 \mid n$.

Ist $p = 13$, so ist $\dfrac{p+1}{2} = 7 \mid n$ und

$$1 + 7 + 7^2 = 3 \cdot 19 \mid n,$$

$$1 + 19 + 19^2 = 3 \cdot 127 \mid n,$$

$$1 + 127 + 127^2 \mid n, \text{ anderseits } \equiv 0 \pmod 3,$$

d. h., es ist mindestens $3^3 \mid n$.

Ist $p \neq 13$, so folgt $1 + 13 + 13^2 = 3 \cdot 61 \mid n$. Aus $p = 61$ ergibt sich nun:

$$\frac{p+1}{2} = 31 \mid n;\ \ 1 + 31 + 31^2 = 3 \cdot 331 \mid n;\ \ 1 + 331 + 331^2 \equiv 0 \pmod 3$$

und daraus wieder $3^3 \mid n$.

Ist $p \neq 61$, so ist $1 + 61 + 61^2 = 3 \cdot 13 \cdot 97 \mid n$. Wäre $p = 97$, dann wäre auch

$$\frac{p+1}{2} = 7^2 \mid n;\ \ 1 + 7 + 7^2 = 3 \cdot 19 \mid n,\ \text{d. h. } 3^3 \mid n.$$

Es bleibt somit nur der Fall $p \neq 97$ übrig. Dann folgt aber aus $1 + 97 + 97^2 \equiv 0 \pmod 3$ wieder $3^3 \mid n$. Die Annahme $3^3 \nmid n$ hat zu einem Widerspruch geführt. Der Fall C ist damit erledigt. Es ist $l^{3k} \mid n$.

D. Zum Schluß soll nun gezeigt werden, daß auch $l^{4k} \mid n$ ist. Dazu unterscheiden wir die vier Fälle: (α) $k > 3$; (β) $k = 3$; (γ) $k = 2$; (δ) $k = 1$.

---

[8]) Vgl. Fußnote [1]).

[9]) Vgl. Fußnote [1]).

(α) $k > 3$. Wir gehen wieder von (24) aus. Wegen $k \geqq 4$ ist

$$1 + q_1^{l^3} + q_1^{2l^3} + \cdots + q_1^{(l-1)l^3} = d \mid n. \tag{36}$$

Benutzen wir die Abkürzungen (25) und (30), so können wir ebenso wie früher sagen: Das Produkt $a \cdot b \cdot c \cdot d$ enthält mindestens vier verschiedene Primteiler, die $\equiv 1 \pmod{l}$ sind. Unter den Zahlen $q_2, q_3, \ldots, q_r$ gibt es daher mindestens drei, die $\equiv 1 \pmod{l}$ sind, und daraus folgt wieder, daß $l^{4k} \mid n$ sein muß.

(β) $k = 3$. Die Behauptung lautet in diesem Falle: $l^{12} \mid n$. Nach Voraussetzung ist $l^3 \mid 2\beta_\varrho + 1$, also

$$2\beta_\varrho \geqq 26 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r). \tag{37}$$

Ist l enthalten in $q_1 q_2 \cdots q_r$, so ist nach (37) $l^{26} \mid n$. Ist $l = p$, dann kann man so schließen: Das Produkt $a \cdot b \cdot c$ enthält mindestens drei verschiedene Primteiler, die $\equiv 1 \pmod{l}$ sind und in $q_2 q_3 \cdots q_r$ enthalten sein müssen. Dies liefert die Behauptung.

(γ) $k = 2$: Die Voraussetzung $l^2 \mid 2\beta_\varrho + 1$ liefert

$$2\beta_\varrho \geqq 8 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r). \tag{38}$$

Ist l eine der Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_r$, so ist nach (38) $l^8 \mid n$, die Behauptung also bewiesen.

Ist $l = p$, so muß wegen $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ [10]) und C mindestens $l^9 \mid n$ sein.

(δ) $k = 1$: Nach C ist $l^3 \mid n$. Ist nun $l = p$, so folgt aus $\alpha \equiv 1 \pmod 4$:

$$l^5 \mid n.$$

Ist l enthalten in $q_1 q_2 \cdots q_r$, so ist $l^4 \mid n$ auf Grund der Strukturformel für ungerade vollkommene Zahlen [11]). Der Beweis von (1) ist damit beendet.

IV. Notwendige Bedingungen für die Exponenten in der Primfaktorenzerlegung einer ungeraden vollkommenen Zahl.

(1) **Satz.** *Ist* $n = p^\alpha q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} \cdots q_r^{2\beta_r}$ *und* $2\beta_\varrho + 1 = l^{\xi_\varrho}$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, *wobei* l *eine Primzahl ist und die* ξ_ϱ *beliebige positive ganze Zahlen bedeuten, so sind die beiden Bedingungen*

(a) $$p \equiv 1 \pmod{l},$$

(b) $$\frac{\alpha + 1}{2} \equiv 0 \pmod{l} \text{ oder } \frac{\alpha + 1}{2} \equiv 1 \pmod{l}$$

notwendig dafür, daß n *vollkommen ist.*

Beweis. Aus $2\beta_\varrho + 1 = l^{\xi_\varrho}$ folgt

$$2\beta_\varrho = l^{\xi_\varrho} - 1 \quad \text{und} \quad l - 1 \mid 2\beta_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, r). \tag{2}$$

Auf Grund von III, (1) ist $l^4 \mid n$. Wäre $p = l$, so wäre wegen (2):

$$\frac{n}{l^\alpha} = q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} \cdots q_r^{2\beta_r} \equiv 1 \pmod{l}. \tag{3}$$

Anderseits wäre aber

$$\frac{n}{l^\alpha} = \frac{l+1}{2}\left(1 + l + l^2 + \cdots + l^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)\left(1 - l + l^2 - + \cdots + l^{\frac{\alpha-1}{2}}\right) \cdot \frac{\prod_{\varrho=1}^{r}(1 + q_\varrho + q_\varrho^2 + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho})}{l^\alpha} \equiv \frac{l+1}{2} \pmod{l}, \tag{4}$$

---

[10]) Vgl. Fußnote [1]).

[11]) Vgl. Fußnote [1]).

weil $\prod_{\varrho=1}^{r}(1+q_\varrho+q_\varrho^2+\cdots+q_\varrho^{2\beta_\varrho})$ wegen (2) und I, (2) außer l nur Primteiler der Restklasse 1 (mod l) enthält. (3) und (4) liefern $1 \equiv \frac{l+1}{2} \pmod{l}$, also einen Widerspruch. Daher ist

$$p \neq l. \tag{5}$$

Weil $p^\alpha \mid \prod_{\varrho=1}^{r}(1+q_\varrho+q_\varrho^2+\cdots+q_\varrho^{2\beta_\varrho})$ sein muß, kann, auf Grund von I, (2) und IV, (2) nur noch

$$p \equiv 1 \pmod{l} \tag{6}$$

sein. Für n ergibt sich also

$$n = p^\alpha q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} \cdots q_r^{2\beta_r} = \frac{p+1}{2}\left(1+p+p^2+\cdots+p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right) \cdot \left(1-p+p^2-+\cdots+p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right) \cdot \prod_{\varrho=1}^{r}(1+q_\varrho+q_\varrho^2+\cdots+q_\varrho^{2\beta_\varrho}) \tag{7}$$

mit $p \equiv 1 \pmod{l}$, $q_1 = l$ und $2\beta_\varrho + 1 = l^{\xi_\varrho}$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$.

Es folgt daraus

$$\frac{n}{l^{2\beta_1}} \equiv 1 \pmod{l}. \tag{8}$$

Ist nun

$$l \mid 1+p+p^2+\cdots+p^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv \frac{\alpha+1}{2} \pmod{l}, \tag{9}$$

so bedeutet dies

$$\frac{\alpha+1}{2} \equiv 0 \pmod{l}. \tag{10}$$

Ist

$$l \nmid 1+p+p^2+\cdots+p^{\frac{\alpha-1}{2}}, \tag{11}$$

so muß auf Grund von (7) und (8)

$$\frac{\alpha+1}{2} \equiv 1 \pmod{l} \tag{12}$$

sein. Der Beweis ist damit beendet. (1) besagt, daß z. B. $n = p^5 q_1^6 q_2^6 \cdots q_r^6$ nicht vollkommen sein kann.

(13) *Die ungerade Zahl $n = p^\alpha q_1^4 q_2^4 \cdots q_r^4$ ist nicht vollkommen.*

Beweis. Nach III, (1) ist $5^4 \mid n$. Nach (1) ist $p \equiv 1 \pmod 5$, also $p \neq 5$. Wir können daher $n = p^\alpha 5^4 q_2^4 \cdots q_r^4$ setzen und sogar noch etwas allgemeiner behaupten:

(14) $n = p^\alpha 5^4 q_2^{2\beta_2} q_3^{2\beta_3} \cdots q_r^{2\beta_r}$ *mit* $2\beta_\varrho + 1 = 5^{\xi_\varrho}$ $(\varrho = 2, 3, \ldots, r)$ *ist nicht vollkommen.*

Es ist $1+5+\cdots+5^4 = 11 \cdot 71 \mid n$. Wegen $p \equiv 1 \pmod 4$ [12]) gilt: $p \neq 11, \neq 71$. Daher ist

(15) $1+11+\cdots+11^4 = 5 \cdot 3221 \mid n$; $1+71+\cdots+71^4 = 5 \cdot 11 \cdot 211 \cdot 2221 \mid n$.

Weil $211 \equiv 3 \pmod 4$ ist, so können wir jetzt n in der Gestalt annehmen:

$$n = p^\alpha 5^4 \cdot 11^{2\beta_2} \cdot 71^{2\beta_3} \cdot 211^{2\beta_4} \cdot q_5^{2\beta_5} \cdots q_r^{2\beta_r}. \tag{16}$$

[12]) Vgl. Fußnote [1]).

Ferner sind noch $2221 \mid n$ und $3221 \mid n$. Mindestens eine dieser beiden Zahlen muß p sein, denn sonst wäre

$$(17) \qquad \begin{aligned} 5 &\mid 1 + 211 + \cdots + 211^4 \mid n; \\ 5 &\mid 1 + 2221 + \cdots + 2221^4 \mid n; \\ 5 &\mid 1 + 3221 + \cdots + 3221^4 \mid n. \end{aligned}$$

(15) und (17) würden dann $5^5 \mid n$ ergeben, entgegen (14).

Ist $p = 2221$, so ist $\dfrac{p+1}{2} = 1111 = 11 \cdot 101 \mid n$, d. h.

$$(18) \qquad 101 \mid n.$$

Daraus folgt

$$(19) \qquad \begin{aligned} 5 \mid 1 + 211 + \cdots + 211^4 \mid n;\ 5 \mid 1 + 101 + \cdots + 101^4 \mid n; \\ 5 \mid 1 + 3221 + \cdots + 3221^4 \mid n. \end{aligned}$$

(15) und (19) liefern wieder $5^5 \mid n$.

Ist $p = 3221$, so ist $\dfrac{p+1}{2} = 1611 = 9 \cdot 179 \mid n$. Es ist dann mindestens $3^4 \mid n$; außerdem ist noch $5^4 \mid n$ und mindestens $11^4 \mid n$. Das liefert

$$(20) \qquad \frac{\sigma(n)}{n} > \frac{11^2}{3^4} \cdot \frac{11 \cdot 71}{5^4} \cdot \frac{5 \cdot 3221}{11^4} = \frac{3221 \cdot 71}{81 \cdot 125 \cdot 11} = \frac{228\ 691}{111\ 375} > 2.$$

Die Richtigkeit der Behauptungen (13) und (14) ist also erwiesen.

(21) **Satz.** *Ist* $n = p^\alpha q_1^{2\beta_1} \cdots q_r^{2\beta_r}$ *eine ungerade Zahl, und haben die um* 1 *vermehrten geraden Exponenten den gemeinsamen Teiler* $3 \cdot 3$ *oder* $3 \cdot 5$ *oder* $3 \cdot 7$ *oder* $3 \cdot 11$, *so ist* n *nicht vollkommen. Für den Fall* $p = 5$ *ist* n *ebenfalls nicht vollkommen, wenn* 3 *oder* 5 *oder* 7 *gemeinsamer Teiler der Zahlen* $2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ *ist. Ist* $p = 13$ *oder* 29, *so genügt schon die Voraussetzung* $3 \mid 2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, *ist* $p = 17$, *die Voraussetzung* $5 \mid 2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, *um zu zeigen, daß* n *nicht vollkommen sein kann.*

Beweis.

(a) Es sei zuerst vorausgesetzt, daß $3 \cdot 3 \mid 2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ ist. Dann ist nach III, (1): $3^8 \mid n$ und wegen $p \equiv 1 \pmod 4$ [13]): $p \neq 3$, also $1 + 3 + 3^2 = 13 \mid n$. Wir unterscheiden die Fälle: $(\alpha)\ p = 13$ und $(\beta)\ p \neq 13$.

$(\alpha)\ p = 13$. Es ist $\dfrac{p+1}{2} = 7 \mid n$; $1 + 7 + 7^2 = 3 \cdot 19 \mid n$; $1 + 19 + 19^2 = 3 \cdot 127 \mid n$; $1 + 127 + 127^2 = 3 \cdot 5419 \mid n$; $5419 \equiv -6 \pmod{31}$, d. h. $1 + 5419 + 5419^2 \equiv 0 \pmod{31}$, also $31 \mid n$. Daraus ergibt sich nun:

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4}{3^4} \cdot \frac{1 + 13}{13} \cdot \frac{1 + 7 + 7^2}{7^2} \cdot \frac{1 + 19 + 19^2}{19^2} \cdot \frac{1 + 31 + 31^2}{31^2} \cdot \frac{128}{127}$$

$$= \frac{11^2 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 127 \cdot 3 \cdot 331 \cdot 128}{3^4 \cdot 13 \cdot 7^2 \cdot 19^2 \cdot 31^2 \cdot 127} = 2\,\frac{121 \cdot 331 \cdot 128}{3 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31^2} = 2\,\frac{5\,126\,528}{4\,984\,707} > 2.$$

$(\beta)\ p \neq 13$. Dann ist $1 + 13 + 13^2 = 3 \cdot 61 \mid n$.

Ist $p = 61$, so folgt: $\dfrac{p+1}{2} = 31 \mid n$; $1 + 31 + 31^2 = 3 \cdot 331 \mid n$; $331 \equiv 2 \pmod 7$, d. h. $1 + 331 + 331^2 \equiv 0 \pmod 7$: $7 \mid n$; $1 + 7 + 7^2 = 3 \cdot 19 \mid n$. Daraus folgt wieder $\dfrac{\sigma(n)}{n} > 2$.

---

[13]) Vgl. Fußnote [1]).

Ist $p \neq 61$, so ist $1 + 61 + 61^2 = 3 \cdot 13 \cdot 97 \mid n$. Nun ist $61 \equiv 4 \pmod{19}$; $61^3 \equiv 7 \pmod{19}$, also $1 + 61^3 + 61^6 \equiv 0 \pmod{19}$; $19 \mid n$; $127 \mid n$; $5419 \mid n$; $31 \mid n$; $331 \mid n$; $7 \mid n$; schließlich $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$.

(b) Es sei jetzt $3 \cdot 5 \mid 2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$.

Nach III, (1) folgt: $3^4 \mid n$ und $5^4 \mid n$. Ferner ist $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 11^2 \mid n$; $1 + 11 + 11^2 = 7 \cdot 19 \mid n$. Daraus: $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$.

(c) Ist $3 \cdot 7 \mid 2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, so ist $3 \mid n$; $7 \mid n$; $13 \mid n$; $19 \mid n$; $127 \mid n$; $5419 \mid n$; $31 \mid n$; $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$.

(d) Ist $3 \cdot 11 \mid 2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, so ist $3 \mid n$; $11 \mid n$; $13 \mid n$; $7 \mid n$; $19 \mid n$; $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$.

(e) Ist nun $p = 5$ und $3 \mid 2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, so folgt nach III, (1), daß mindestens $3^4 \mid n$ ist. Auf Grund von $3 \mid 2\beta_\varrho + 1$ ist dann aber mindestens $3^8 \mid n$. Ferner ergibt sich wieder: $13 \mid n$; $61 \mid n$; $97 \mid n$; $3169 \mid n$;

$$\frac{\sigma(n)}{n} \geqq \frac{1 + 3 + \cdots + 3^8}{3^8} \cdot \frac{1 + 5}{5} \cdot \frac{1 + 13 + 13^2}{13^2} \cdot \frac{1 + 61 + 61^2}{61^2} \cdot \frac{1 + 97 + 97^2}{97^2} \cdot \frac{1 + 3169 + 3169^2}{3169^2} = \frac{13 \cdot 757}{3^8} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3 \cdot 61}{13^2} \cdot \frac{3 \cdot 13 \cdot 97}{61^2} \cdot \frac{3 \cdot 3169}{97^2} \cdot \frac{3 \cdot 3\,348\,577}{3169^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{757 \cdot 3\,348\,577}{3^3 \cdot 5 \cdot 61 \cdot 97 \cdot 3169} = 2 \cdot \frac{2\,534\,872\,789}{2\,531\,381\,355} > 2.$$

(f) Vorausgesetzt sei: $p = 5$ und $5 \mid 2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$.

Es ist $\frac{p+1}{2} = 3 \mid n$; $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 11^2 \mid n$; nach III, (1): $5^4 \mid n$ und daraus nach (20): $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$.

(g) Ist $p = 5$ und $7 \mid 2\beta^\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, so folgt wegen $3 \mid n$; $5 \mid n$; $7 \mid n$: $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$.

(h) Voraussetzung: $p = 13$; $3 \mid 2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$.
Der Beweis dieses Falles ist in (a), (α) enthalten.

(i) Ist $p = 29$ und $3 \mid 2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, so ergibt sich:
$\frac{p+1}{2} = 3 \cdot 5 \mid n$; $1 + 5 + 5^2 = 31 \mid n$; $331 \mid n$; $7 \mid n$; $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$.

(k) Ist $p = 17$ und $5 \mid 2\beta_\varrho + 1$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, dann folgt:
$\frac{p+1}{2} = 3^2 \mid n$; $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 11^2 \mid n$; also nach III, (1) und (20): $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$.

Eingegangen 25. November 1939.

Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale[1]).

Von *Theodor Schneider* in Göttingen.

§ 1. Ergebnisse.

Es sind im wesentlichen zwei Fragen, die hier behandelt werden sollen und die in den Sätzen I und II beantwortet werden. Satz I gibt Auskunft über algebraische Abhängigkeit zwischen $p+1$ arithmetisch charakterisierten, $2p$-fach periodischen Funktionen von p Veränderlichen und damit speziell auch über entsprechende Abelsche Funktionen. Satz II sagt etwas aus über das arithmetische Verhalten der Perioden von Abelschen Integralen erster und zweiter Gattung.

Welcher Art ist nun diese arithmetische Charakterisierung der $2p$-fach periodischen Funktionen? Es sei $Z(U_1, \ldots, U_p) = Z(\mathfrak{U})$ [2]) eine $2p$-fach periodische Funktion von $\mathfrak{U}$ [2]), die sich nicht als Funktion von weniger als p unabhängigen Variablen darstellen lasse. Die Periodenmatrix von $Z(\mathfrak{U})$ sei

$$((\omega_{kl})) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, p \\ l = 1, \ldots, 2p \end{pmatrix}.$$

und man kann voraussetzen, daß z. B. die Determinante

$$D(\omega_{kl}) \neq 0 \qquad (k, l = 1, \ldots, p)$$

ist. Dann existieren immer p voneinander linear unabhängige Abelsche Integrale erster Gattung

$$\mathfrak{u} = \int_c^{(x,y)} \mathfrak{R}(x, y)\, dx,$$

wobei zwischen x und y eine algebraische Beziehung in Form eines Polynoms $F(x, y) = 0$ besteht, und die noch die folgende Eigenschaft haben: Die zu $F(x, y) = 0$ gehörige Riemannsche Fläche vom Geschlecht $q \geqq p$ denke man sich durch $2q$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt und den Periodizitätsmodul von u_k am h-ten Querschnitte mit $w_{kh} \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, p \\ h = 1, \ldots, 2q \end{pmatrix}$ bezeichnet; dann gelten mit ganzen rationalen Zahlen m_{hl} die Gleichungen

$$w_{kh} = \sum_{l=1}^{2p} m_{hl}\, \omega_{kl} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, p \\ h = 1, \ldots, 2q \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Eingereicht zur Erlangung des Grades eines Dr. phil. nat. habil. in der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen.

[2]) Für die Folge $x_1, \ldots, x_p$ werde abkürzend das entsprechende deutsche Zeichen $\mathfrak{x}$ geschrieben, wenn die Glieder der Folge durch lateinische Buchstaben bezeichnet sind; sinngemäß steht dann $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ für $f_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_p)$. Die Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist zu lesen: $a_\nu = b_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, p)$. Sind die p Glieder einer Folge $\xi_1, \ldots, \xi_p$ mit griechischen Buchstaben bezeichnet, so wird für die Folge das Zeichen $\{\xi\}$ verwendet.

Führt man die Integralsummen

$$\mathfrak{U} = \sum_{l=1}^{p} \int_{c_l}^{(x_l, y_l)} \Re(x, y)\, dx$$

ein, so gibt es schließlich eine rationale und symmetrische Funktion

$$S((x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p)) = S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

der oberen Grenzpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, die, in $\mathfrak{U}$ ausgedrückt, unsere $2p$-fach periodische Funktion $Z(\mathfrak{U})$ ist. Für $q = p$ ist $Z(\mathfrak{U})$ eine Abelsche Funktion. Die arithmetische Charakterisierung von $Z(\mathfrak{U})$ besteht nun in der Forderung:

Die sämtlichen Koeffizienten des Polynoms $F(x, y)$, der rationalen Funktionen $\Re(x, y)$ von x und y und der rationalen symmetrischen Funktion $S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ seien algebraische Zahlen. Ist diese Forderung erfüllt, so will ich $Z(\mathfrak{U})$ mit $A(\mathfrak{U})$ bezeichnen und kurz A-Funktion nennen. Nebenbei sei bemerkt, daß man diese A-Funktionen auch auf andere Arten hätte charakterisieren können.

Diejenigen A-Funktionen, die aus den gleichen Integralsummen hervorgehen, haben selbstverständlich auch die gleichen Perioden. Unter diesen A-Funktionen gibt es p voneinander algebraisch unabhängige. Andererseits ist aus der Theorie der $2p$-fach periodischen Funktionen bekannt, daß jeweils $p + 1$ Funktionen, die $2p$ mit rationalen Koeffizienten linear unabhängige Perioden gemeinsam haben, voneinander algebraisch abhängig sind. Für A-Funktionen gilt nun die schärfere Aussage:

Satz I. *Zwischen $p + 1$ A-Funktionen der Variablen $\mathfrak{U}$, die p im Körper aller Zahlen linear unabhängige Perioden gemeinsam haben, besteht eine algebraische Abhängigkeit.*

Wie zu Beginn von § 2 gezeigt werden wird, ist der folgende Satz I′ in Satz I als Spezialfall enthalten; mit $\mathfrak{l}(\mathfrak{U})$ werden dabei lineare homogene Formen der Variablen $\mathfrak{U}$ bezeichnet:

Satz I′. *Die Funktionen $A_1(\mathfrak{U}), \ldots, A_p(\mathfrak{U})$ seien Umkehrfunktionen des gleichen Systems von Integralsummen, k sei eine Zahl der Folge $1, \ldots, p$. Haben die genannten p Funktionen mit $A_k(\mathfrak{l}(\mathfrak{U})) = A^*(\mathfrak{U})$ mindestens p Perioden gemeinsam, die mit beliebigen Koeffizienten linear unabhängig sind, und sind die sämtlichen Zahlkoeffizienten der Linearausdrücke $\mathfrak{l}(\mathfrak{U})$ algebraisch, so besteht zwischen den $p + 1$ Funktionen $A_1(\mathfrak{U}), \ldots, A_p(\mathfrak{U})$, $A^*(\mathfrak{U})$ eine algebraische Abhängigkeit.*

Natürlich kann man den Satz I′ auch umkehren und aus dem Nichtvorhandensein einer algebraischen Beziehung der $p + 1$ Funktionen darauf schließen, daß mindestens eine der Voraussetzungen, die zu Satz I führen, nicht erfüllt sein kann. Man erhält so beispielsweise die Aussage:

Sind die $p + 1$ Funktionen $A_1(\mathfrak{U}), \ldots, A_p(\mathfrak{U})$ und $A^*(\mathfrak{U})$, die p linear unabhängige Perioden gemeinsam haben, algebraisch unabhängig, so können die Zahlkoeffizienten der p Linearformen $\mathfrak{l}(\mathfrak{U})$ nicht sämtlich algebraisch sein.

Satz I′ gilt natürlich im Falle der gewöhnlichen Multiplikation ($\mathfrak{l}(\mathfrak{U}) = \varrho\mathfrak{U}$ mit rationalem ϱ), aber es ist in geeigneten Fällen auch eine verallgemeinerte Multiplikation der A-Funktionen möglich. Für diese verallgemeinerte komplexe Multiplikation möchte ich folgendes Beispiel anführen:

Alle Perioden der Integrale erster Gattung

$$u_k = \int_{\cdot}^{(x, y)} \frac{x^{k-1}\, dx}{\sqrt{1 - x^n}} \qquad \left(k = 1, \ldots, \left[\frac{\nu - 1}{2}\right] = p\right)$$

gehen aus den Zahlen $\int_0^1 \frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{1-x^n}}$ durch Multiplikation mit passenden Zahlen aus dem Körper der n-ten Einheitswurzeln hervor. Bildet man p zu den Integralen gehörige geeignete A-Funktionen und setzt man

$$l_k(\mathfrak{U}) \equiv e^{\frac{2\pi ik}{n}} U_k, \quad U_k = \sum_{l=1}^{p} \int_{c_l}^{(x_l, y_l)} \frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{1-x^n}} \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

so bestätigt man unter Benutzung von Satz I leicht, daß

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{U}) \quad \text{und} \quad A_k(\mathfrak{l}(\mathfrak{U})) \qquad (k \text{ fest})$$

voneinander algebraisch abhängig sind. An Stelle von $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ kann auch $e^{\frac{2\pi imk}{n}}$ mit irgendeinem ganzzahligen m gewählt werden.

Ein zweites allgemeineres Beispiel erhält man folgendermaßen: $f(x)$ sei ein beliebiges Polynom in x vom Grade $n_1 \geqq 1$ mit rationalen Koeffizienten und $\varepsilon = e^{\frac{2\pi imk}{n_2}}$ eine Wurzel der Kreisteilungsgleichung des Grades $n_2 \geqq 1$. Man setze

$$F(x, y) \equiv y^2 - f(x^{n_2}) = 0.$$

Das Polynom $f(x^{n_2})$ hat den Grad $n = n_1 n_2$. Es sei ω_{l_1} eine beliebige Periode des Integrals erster Gattung

$$\int \frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{f(x^{n_2})}} \qquad \left(k = 1, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right).$$

Man überzeugt sich durch die Substitution $x = \varepsilon^{-1}x'$, daß dann auch $\omega_{l_2} = \varepsilon^k \omega_{l_1}$ ein Periodizitätsmodul des gleichen Integrals ist; ebenso auch $\omega_{l_3} = \varepsilon^{2k}\omega_{l_1}$ usf. Also gilt beispielsweise für die zu $y^2 - f(x^{n_2}) = 0$ gehörigen A-Funktionen, daß zwischen $A_k(\varepsilon U_1, \ldots, \varepsilon^p U_p)$ und den Funktionen $\mathfrak{A}(\mathfrak{U})$ eine algebraische Beziehung besteht.

Natürlich ließe sich die Reihe der Beispiele zu Satz I′ noch weiter fortsetzen.

Ganz allgemein folgt aus der algebraischen Abhängigkeit der in Satz I′ genannten $p+1$ Funktionen, daß sie $2p$ gemeinsame, voneinander mit rationalen Koeffizienten linear unabhängige Perioden besitzen müssen, woraus sich wiederum Bedingungen für die Zahlkoeffizienten der $\mathfrak{l}(\mathfrak{U})$ ergeben. Ich möchte jedoch nicht näher hierauf eingehen.

Im Falle der elliptischen Funktionen, in dem diese Bedingungen der komplexen Multiplikation ganz einfach sind, ist der in Satz I′ angeschnittene Problemkreis durch die folgende Aussage zu einem gewissen Abschluß gebracht. Es ist bekannt [3]): Aus der Algebraizität der elliptischen Modulfunktion $J(\tau)$ folgt, daß τ entweder imaginärquadratisch oder transzendent sein muß, — und umgekehrt: Ist τ algebraisch, aber nicht imaginärquadratisch, so ist $J(\tau)$ transzendent.

Die Verallgemeinerung hiervon, die Satz I′ enthält, wird wohl in der nachstehenden Formulierung am deutlichsten.

Die Periodenmatrix $((\omega_{kl}))\begin{pmatrix} k = 1, \ldots, p \\ l = 1, \ldots, 2p \end{pmatrix}$ werde durch lineare Transformation so normiert, daß die ersten p Spalten in die p-zeilige Einheitsmatrix übergehen. Die quadratische Matrix, die dabei aus den letzten p Spalten von $((\omega_{kl}))$ entsteht, werde mit $((\tau_{kl}))$ $(k, l = 1, \ldots, p)$ bezeichnet. Dann folgt aus Satz I′ für die Moduln τ_{kl}:

[3]) Th. Schneider, Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale, Mathematische Annalen **113** (1937), S. 5.

Gestattet die Periodenmatrix $((\omega_{kl}))$ keine komplexe Multiplikation, so muß mindestens einer der Moduln in einer Spalte τ_{kl_0} $(k = 1, \ldots, p;\ l_0$ fest) transzendent sein — und umgekehrt: Sind alle Moduln in einer Spalte τ_{kl_0} $(k = 1, \ldots, p;\ l_0$ fest) algebraisch, so ist zwischen den zu $((\omega_{kl}))$ gehörigen Abelschen Funktionen komplexe Multiplikation möglich.

Über die Perioden von Abelschen Integralen erster und zweiter Gattung gibt Satz II Auskunft. Er lautet:

Satz II. *Die Perioden eines Abelschen Integrales erster oder zweiter Gattung, dessen Integrand als algebraische Funktion von x nur algebraische Zahlkoeffizienten besitzt, sind nicht alle algebraisch.*

Bewiesen wird folgende Verschärfung dieses Satzes: Es sei wieder

$$((\omega_{kl})) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, p \\ l = 1, \ldots, 2p \end{pmatrix}$$

die Matrix $2p$ linear unabhängiger Perioden von p linear unabhängigen Integralen erster Gattung über $F(x, y) = 0$ vom Geschlecht p. Die Determinante

$$D(\omega_{kl}) \qquad (k, l = 1, \ldots, p)$$

sei von Null verschieden. $J(x, y)$ sei ein zu $F(x, y) = 0$ gehöriges Integral erster oder zweiter Gattung, dessen sämtliche Koeffizienten algebraisch seien. $F(x, y)$ soll ebenfalls algebraische Koeffizienten haben. η_j sei die der Spalte ω_{kj} entsprechende Periode von $J(x, y)$. Dann sind die p Zahlen η_j $(j = 1, \ldots, p)$ nicht sämtlich algebraisch.

Wendet man Satz II speziell auf Integrale erster Gattung an, so kann man ihn auch so formulieren:

Die $2p$ unabhängigen Periodizitätsmoduln einer jeden Variablen einer A-Funktion sind nicht sämtlich algebraisch.

Aus den Beispielen, die sich hier anschließen lassen, will ich nur eines herausgreifen, das ich einer mündlichen Mitteilung von Herrn C. L. Siegel verdanke. Es betrifft dies die Anwendung von Satz II auf die Beta-Funktion. Es ist

$$\int x^{a-1}\,(1 - x)^{b-1}\,dx$$

für rationale Werte von a und b ein Abelsches Integral. Seine sämtlichen Perioden erhält man durch Integration auf allen Blättern der zugehörigen Riemannschen Fläche zwischen je zweien ihrer Verzweigungspunkte. Als solche treten aber nur die Punkte 0, 1 und ∞ auf. Es offensichtlich, daß sich alle Werte des Integrals zwischen zwei festen dieser Punkte nur multiplikativ um Einheitswurzeln unterscheiden. Also genügt es, beispielsweise nur die drei reellen Integrale

$$\mathsf{B}(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\,dx, \quad \int_1^\infty x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\,dx, \quad \int_0^\infty x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\,dx$$

zu betrachten. Das letzte ist aber die Summe der beiden ersten. Auf das mittlere Integral wende man die Substitution $x \to x'^{-1}$ an und ersetze x' wieder durch x. Dann erhält man

$$\int_1^\infty x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\,dx = \mathsf{B}(1 - a - b, b)\,.$$

Wegen $\mathsf{B}(a, b) = \dfrac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}$ und $\Gamma(a)\,\Gamma(1 - a) = \dfrac{\pi}{\sin a\pi}$ ist nun

$$\mathsf{B}(1 - a - b, b) = \frac{\Gamma(1 - a - b)\,\Gamma(b)}{\Gamma(1 - a)} = \frac{\sin a\pi}{\sin (a + b)\,\pi}\,\mathsf{B}(a, b)\,.$$

Für rationale a und b ist aber $\frac{\sin a\pi}{\sin (a+b)\pi}$ algebraisch, also sind sämtliche Perioden von $\int x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ algebraische Vielfache von $\mathsf{B}(a, b)$. Das B-Integral ist für $0<a<1$, $0<b<1$, $a+b<1$ ein Integral erster Gattung und für $0<a<1$, $0<b<1$, $a+b>1$ ein solches zweiter Gattung. Für $a+b=1$ ist der Wert von $\mathsf{B}(a, b)=\Gamma(a)\Gamma(1-a)$ wegen der Transzendenz von π transzendent. Die B-Funktion ist aber wegen der Funktionalgleichung der Γ-Funktion für alle reellen a und b bekannt, wenn sie nur in dem Gebiet $0<a\leqq 1$ und $0<b\leqq 1$ bekannt ist. Wir schließen also aus Satz II:

Die B-Funktion nimmt für alle rationalen, aber nicht ganzzahligen a und b transzendente Werte an.

§ 2. Hilfsbetrachtungen.

Das Hauptziel dieses Abschnittes ist, gewisse Eigenschaften der Koeffizienten einer geeigneten Potenzreihenentwicklung der A-Funktionen zu untersuchen.

Vorher möchte ich jedoch den Beweis erbringen für die

Bemerkung 1. Satz I′ ist in Satz I enthalten.

Zu diesem Zwecke ist lediglich zu zeigen, daß $A_k(\mathfrak{l}(\mathfrak{U}))=A^*(\mathfrak{U})$ als Funktion der $\mathfrak{U}$ eine A-Funktion darstellt, wenn nur die Koeffizienten von $\mathfrak{l}(\mathfrak{U})=\mathfrak{V}$ algebraische Zahlen sind. Die A-Funktion $A_k(\mathfrak{V})$ sei entstanden als symmetrische rationale Funktion $S_k(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ durch Umkehrung der Integralsummen

$$\mathfrak{V}=\mathfrak{l}(\mathfrak{U})=\sum_{l=1}^{p}\int_{c_l}^{(x_l, y_l)}\mathfrak{T}(x, y)dx. \tag{1}$$

Die Koeffizienten der rationalen Funktionen $\mathfrak{T}(x, y)$ sind dabei algebraisch, die Funktionen selbst sind wegen der linearen Unabhängigkeit von p Periodenspalten im Körper der komplexen Zahlen linear unabhängig. Aus dieser linearen Unabhängigkeit folgt diejenige der Formen $\mathfrak{l}(\mathfrak{U})$, und aus dieser wiederum die Möglichkeit der Auflösung des Systems (1) nach den $\mathfrak{U}$. Man erhält eine Darstellung

$$\mathfrak{U}=\sum_{l=1}^{p}\int_{c_l}^{(x_l, y_l)}\mathfrak{R}(x, y)\,dx,$$

wobei die Funktionen $\mathfrak{R}(x, y)$ ebenfalls rational mit algebraischen Koeffizienten und voneinander linear unabhängig sind. Stellt man nun die symmetrische Funktion $S_k(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ durch $\mathfrak{U}$ dar, so muß

$$A_k(\mathfrak{l}(\mathfrak{U}))=S_k(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})=A^*(\mathfrak{U}) \qquad (k \text{ fest})$$

sein, und hierbei ist $A^*(\mathfrak{U})$ eine A-Funktion. Man kann sich also auf die Beweisführung der Sätze I und II beschränken.

Zur Untersuchung weiterer Eigenschaften der A-Funktionen gehe man etwas genauer auf deren Entstehung ein. Die Summen der Integrale erster Gattung haben, wie bereits angegeben, die Gestalt

$$\mathfrak{U}=\sum_{l=1}^{p}\int_{c_l}^{(x_l, y_l)}\mathfrak{R}(x, y)dx \tag{2}$$

mit bestimmten unteren Grenzen $\mathfrak{c}$, die keineswegs algebraisch vorausgesetzt sind. Jede rationale symmetrische Funktion von $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ist, wenn die eingangs genannten Algebraizitätsbedingungen der auftretenden Koeffizienten erfüllt sind, in $\mathfrak{U}$ ausgedrückt, eine A-Funktion $A(\mathfrak{U})$. Ersetzt man die unteren Grenzen $\mathfrak{c}$ durch andere Zahlen $\mathfrak{c}'$ und entsprechend die linken Seiten $\mathfrak{U}$ durch $\mathfrak{W}$, so geht das System (2) über in

$$\mathfrak{W} = \sum_{l=1}^{p} \int_{c_l'}^{(x_l, y_l)} \Re(x, y)\, dx. \tag{3}$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{U} - \mathfrak{W} = \mathfrak{d} = \sum_{l=1}^{p} \int_{c_l}^{c_l'} \Re(x, y)\, dx \neq \infty,$$

da die u Integrale erster Gattung sind, und

$$A(\mathfrak{U}) = A(\mathfrak{W} + \mathfrak{d}) = A^{**}(\mathfrak{W}). \tag{4}$$

Bildet man $A^{**}(\mathfrak{W})$ als Umkehrfunktion aus (3), so zeigt sich, daß $A^{**}(\mathfrak{W})$ ebenfalls eine A-Funktion ist. Aus (4) folgt, daß $A(\mathfrak{U})$ und $A^{**}(\mathfrak{W})$ die gleichen Perioden besitzen. Ebenfalls nach (4) überträgt sich algebraische Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit mehrerer Funktionen $A_l(\mathfrak{U})$ auf die gleichen Eigenschaften der entsprechenden $A_l^{**}(\mathfrak{W})$. Man erhält somit die

Bemerkung 2. Gilt Satz I für die Funktionen $A_l(\mathfrak{U})$, die mit speziellen c gebildet sind, so folgt daraus seine Richtigkeit für mit irgendwelchen c′ gebildete Funktionen $A_l^{**}(\mathfrak{W})$.

Es ist also c beliebig wählbar. Man wird es so wählen, daß die Potenzreihenentwicklung von $A(\mathfrak{U})$ möglichst übersichtlich wird.

Zunächst verfüge man über die Werte c derart, daß die Funktion $y = y(x)$, die aus der algebraischen Verknüpfung $F(x, y) = 0$ entsteht, für sämtliche Werte $\mathfrak{x} = c$ regulär ist. Ferner seien die Integranden $\Re(x, y)$ an den Stellen $x = c_l$, $y = y(c_l)$ $(l = 1, \ldots, p)$ in einem später noch näher anzugebenden Sinne regulär, und schließlich seien die symmetrischen rationalen Funktionen von $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, aus denen die A-Funktionen entstanden sind, ebenfalls in einem noch zu präzisierenden Sinne regulär für $\mathfrak{x} = c$. Außerdem verlange man, daß c endliche algebraische Zahlen seien. Weitere Bedingungen für c werden an passender Stelle noch genannt.

Bevor ich mich nun der Entwicklung von $A(\mathfrak{U})$ zuwende, möchte ich noch durch Linearkombination der Integralsummen (2) ein zur Umkehrung besonders geeignetes System angeben.

Die Werte der in (2) vorkommenden Integranden $\Re(x, y)$ an den Stellen $x = c_l$, $y = y(c_l)$ seien mit

$$R_i\,(c_l, y(c_l)) = h_{il} \qquad (i, l = 1, \ldots, p)$$

bezeichnet. Aus der linearen Unabhängigkeit der Integranden $\Re(x, y)$ folgt, daß im allgemeinen die Determinante $D(h_{il}) \neq 0$ sein wird. Die c sollen also jetzt außer den bereits genannten Bedingungen noch die folgende erfüllen, daß $D(h_{il}) \neq 0$ ist. Wie man leicht sieht, ist dies immer möglich. Man kombiniere nun die Gleichungen des Systems (2) linear mit geeigneten Koeffizienten H_{ik}, über die sogleich verfügt werden soll. Dann geht (2) in ein analoges System

$$\mathfrak{V} = \sum_{l=1}^{p} \int_{c_l}^{(x_l, y_l)} \mathfrak{T}(x, y)\, dx \tag{5}$$

über; hierbei ist

$$V_k = V_k(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{p} H_{ik} U_i \qquad (k = 1, \ldots, p) \tag{6}$$

und entsprechend

$$T_k(x, y) = \sum_{i=1}^{p} H_{ik} R_i(x, y) \qquad (k = 1, \ldots, p). \tag{7}$$

Ist nun die aus den Größen H_{ik} gebildete Matrix die reziproke zu $((h_{ik}))$, so folgt

$$T_k(c_l, y(c_l)) = e_{kl}. \tag{8}$$

Es ist

$$A(\mathfrak{U}) = S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = A^*(\mathfrak{V}). \tag{9}$$

Dabei sei $A(\mathfrak{U})$ entstanden als Umkehrfunktion eines Systems (2) mit $\mathfrak{c}$, die den vorstehenden Bedingungen genügen und entsprechend $A^*(\mathfrak{V})$ als Umkehrfunktion eines Systems (5) mit Integranden $\mathfrak{T}(x, y)$, die die Gleichungen (8) befriedigen. Man wird nun die Potenzreihe von $A^*(\mathfrak{V})$ an der Stelle $\mathfrak{V} = \mathfrak{n}$ aufstellen, wobei mit $\mathfrak{n}$ die Nullfolge $(0, \ldots, 0)$ bezeichnet sei, um daraus unter Benutzung von (6) und (9) die Reihe für $A(\mathfrak{U})$ an der Stelle $\mathfrak{U} = \mathfrak{n}$ zu gewinnen.

Der erste Schritt auf dem Wege zu einer Potenzreihenentwicklung von $A(\mathfrak{U})$ ist, $\mathfrak{T}(x, y)$ in eine Reihe nach Potenzen einer geeigneten Ortsveränderlichen zu entwickeln. Aus der vorgegebenen Abhängigkeit $F(x, y) = 0$ ergibt sich y als Funktion $y(x)$. Diese Funktion ist nach Voraussetzung an jeder algebraischen Stelle $x = c_1, \ldots, x = c_p$ regulär, so daß jeweils die Ausdrücke $s_l = x - c_l$ Ortsveränderliche dieser Stellen sind. Außerdem folgt aus $F(x, y) = 0$ durch Differentiation nach x

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$

mit ganzen Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$. Es ist zweckmäßig, die Zahlen $\mathfrak{c}$ so zu wählen, daß die Werte $\varphi_2(\mathfrak{c}) \neq 0$ sind. Wie schon angegeben, sollen die sämtlichen Koeffizienten von $F(x, y)$ und von $\Re(x, y)$ und die Zahlen $\mathfrak{c}$ algebraisch sein. Dann haben auch die Ausdrücke $y(\mathfrak{c})$ algebraische Werte und es sind die Zahlen $R_i(c_l, y(c_l)) = h_{il}$ und damit auch H_{ik} alle algebraisch in einem Körper $\mathfrak{K}_1$, der durch $\mathfrak{c}$, $y(\mathfrak{c})$, die Koeffizienten von $F(x, y)$ und $\Re(x, y)$ bestimmt wird. Die Koeffizienten der Funktionen $\mathfrak{T}(x, y)$ sind nun nach (7) ebenfalls algebraisch in $\mathfrak{K}_1$. Die rationalen Ausdrücke $\mathfrak{T}(x, y)$ lassen sich als Quotienten zweier Polynome mit Koeffizienten, die in $\mathfrak{K}_1$ algebraisch sind, darstellen. Man setze noch über die Zahlen $\mathfrak{c}$ voraus, daß das Nennerpolynom an sämtlichen Stellen $x = c_l$, $y = y(c_l)$ auch nicht verschwindet. Dann sind die Funktionen $\mathfrak{T}(x, y)$ als Funktionen von $\mathfrak{z}$ an den Stellen $\mathfrak{c}$ regulär, und es gilt

Hilfssatz 1. *Die rationalen Funktionen $\mathfrak{T}(x, y)$ gestatten Entwicklungen in Reihen nach Potenzen von $\mathfrak{z}$*

$$T_k(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{kl\nu} s_l^\nu \qquad (k, l = 1, \ldots, p)$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) *die Koeffizienten $\alpha_{kl\nu}$ sind algebraische Zahlen aus $\mathfrak{K}_1$;*

b) *es ist $\overline{|\alpha_{kl\nu}|} < e^{O(\nu)}$* [4]*);*

c) *die gebrochenen Zahlen $\alpha_{kl\nu}$ lassen sich als Quotienten derartiger ganzer Zahlen aus $\mathfrak{K}_1$ darstellen, daß der ganzrationale Nenner jeder der Zahlen $\alpha_{kl\nu}$ ein Teiler von γ_1^ν ist mit von k, l und ν unabhängigem ganzrationalen $\gamma_1 > 0$.*

Die Eigenschaften a) und b) folgen aus der Algebraizität der Koeffizienten von $\mathfrak{T}(x, y)$ und aus der Regularität dieser Funktionen an den Stellen $\mathfrak{c}$. Die Behauptung c) ist der Eisensteinsche Satz über die algebraischen Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung einer algebraischen Funktion.

Die Reihen $\mathfrak{T}(x, y)$ sollen nun in (5) eingesetzt und gliedweise integriert werden. Bezeichnet man noch $\frac{\alpha_{k,l,\nu-1}}{\nu}$ mit α_{k,ν_l}, so ist nach Hilfssatz 1:

---

[4]) Unter $\overline{|a|}$ sei das Maximum der absoluten Beträge aller Konjugierten von a verstanden.

$$V_k(\mathfrak{s}) = \sum_{l=1}^{p} \sum_{\nu_l=1}^{\infty} \alpha_{k,\nu_l} s_l^{\nu_l} \qquad (k = 1, \ldots, p). \tag{10}$$

Es ergibt sich aus Hilfssatz 1 ohne weiteres für die Koeffizienten α_{k,ν_l} der

Hilfssatz 2.

a) *α_{k,ν_l} sind algebraische Zahlen aus $\mathfrak{K}_1$;*

b) $\overline{|\alpha_{k,\nu_l}|} < e^{O(\nu)}$;

c) *α_{k,ν_l} ist als Quotient zweier ganzen Zahlen so darstellbar, daß der ganzrationale Nenner ein Teiler von $\nu_l \gamma_1^{\nu_l - 1}$ ist mit von k und $\{\nu\}$* (siehe [2])) *unabhängigem ganzrationalen γ_1.*

Aus (8) folgen für die Koeffizienten der Glieder ersten Grades die Bedingungen

$$\alpha_{k,\nu_l - 1} = \varrho_{kl} = \begin{cases} 0 & (k \neq l), \\ 1 & (k = l). \end{cases}$$

Danach lauten die Gleichungen (10) etwas genauer

$$V_k(\mathfrak{s}) = s_k + \sum_{l=1}^{p} \sum_{\nu_l=2}^{\infty} \alpha_{k,\nu_l} s_l^{\nu_l} \qquad (k = 1, \ldots, p). \tag{11}$$

Dieses Gleichungssystem (11) soll nun umgekehrt werden, d. h. es sollen aus (11) Potenzreihen für $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{V}$ angegeben werden. Dies Umkehrproblem ist im Kleinen eindeutig lösbar, denn erstens konvergieren die Reihen (11) in einer hinreichend kleinen Kugel um den Nullpunkt im Raume von $\mathfrak{s}$, und zweitens ist, wie gleichfalls aus (11) unmittelbar folgt, V_k bis auf Glieder höherer Ordnung in $\mathfrak{s}$ gleich s_k. Die Funktionaldeterminante ist als Determinante der Einheitsmatrix von p Zeilen und Spalten ungleich Null. Man erhält also die Reihen

$$s_l(\mathfrak{V}) = V_l + \sum_{\{\mu\} \geqq \mathfrak{n}} \beta_{l\{\mu\}} V_1^{\mu_1} \cdots V_p^{\mu_p}, \qquad \mu_1 + \cdots + \mu_p > 1, \tag{12}$$

von denen man weiß, daß sie für alle Werte in einer hinreichend kleinen Kugel um den Nullpunkt im Raume $\mathfrak{V}$ konvergieren. Daraus folgt für die in (12) auftretenden Koeffizienten $\beta_{l\{\mu\}}$ die nachstehende Abschätzung

$$|\beta_{l\{\mu\}}| < e^{O(\mu_1 + \cdots + \mu_p)}. \tag{13}$$

Zur Abkürzung bezeichne man die Dimension $\mu_1 + \cdots + \mu_p$ mit μ. Eine gleiche Abschätzung wie (13) gilt auch für die Konjugierten der Zahlen $\beta_{l\{\mu\}}$, deren Algebraizität noch demonstriert wird. Die Abschätzung (13), sowie diejenige für die Konjugierten folgt ohne weiteres aus der Regularität von $s_l(\mathfrak{V})$ in der Umgebung des Nullpunktes. Um arithmetische Eigenschaften der Koeffizienten $\beta_{l\{\mu\}}$ festzustellen, denke man sich für V_k die Potenzreihe in $\mathfrak{s}$ aus (11) in die rechte Seite von (12) eingesetzt und vergleiche die Koeffizienten der Potenzprodukte von $\mathfrak{s}$. Der Koeffizient eines jeden Produktes $s_1^{\nu_1} \cdots s_p^{\nu_p}$ der Dimension $\nu > 1$ ist gleich Null. Jede dieser Bedingungen liefert eine Summe von Produkten aus je einem $\beta_{l\{\mu\}}$ und aus einem Produkt von Größen α_{k,ν_l}. Die Koeffizienten der Produkte in diesen Summen sind ganzrational. Man untersuche beispielsweise die Beziehung genauer, die man durch Nullsetzen des Koeffizienten von $s_1^{\nu_1} \cdots s_p^{\nu_p}$ erhält. Jeder Summand der entstehenden Summe hat, abgesehen von dem ganzrationalen Zahlfaktor, die Gestalt

$$\beta_{l\{\mu\}} \prod_{l=1}^{p} \prod_{j=1}^{i(l)} \alpha_{k_{lj},\nu_{lj}}. \tag{14}$$

Hierbei seien nur von Null verschiedene $\alpha_{k_{lj},\nu_{lj}}$ hingeschrieben. Der Index j ist zur Unterscheidung verschiedener ν_l hinzugefügt. Ferner sei $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_p$ und $\nu = \nu_1 + \cdots + \nu_p$; dann folgt aus der Einsetzung von V_k aus (11) in (12), daß $\nu_{l1} + \cdots + \nu_{li(l)} = \nu_l$ und damit

$$\sum_{l=1}^{p}\sum_{j=1}^{i(l)} \nu_{lj} = \nu \tag{15a}$$

und daß

$$\sum_{l=1}^{p} i(l) = \mu \tag{15b}$$

ist. Der Summand, für den μ am größten ist, lautet $\beta_{l\{\nu\}}$. Hier ist $\mu = \nu$, und für alle anderen Summanden ist $\mu < \nu$. Folglich kann man, wenn die genannte Beziehung und alle $\beta_{l\{\mu\}}$ mit $\mu < \nu$ bekannt sind, $\beta_{l\{\nu\}}$ daraus berechnen. Der Zahlfaktor, mit dem $\beta_{l\{\nu\}}$ behaftet ist, hat den Wert 1. $\beta_{l\{\nu\}}$ stellt sich also dar als lineare Kombination von Ausdrücken der Art (14) mit ganzrationalen Koeffizienten. Da sämtliche Zahlen α_{k,ν_l} einem Körper $\mathcal{K}_1$ angehören, folgt durch vollständige Induktion, wie ich nicht näher auszuführen brauche, daß auch alle $\beta_{l\{\mu\}}$ in $\mathcal{K}_1$ algebraisch sind. Nun mache man die Annahme, $\beta_{l\{\mu\}}$ mit $\mu < \nu$ lasse sich derart als Quotient zweier ganzen Zahlen darstellen, daß der ganzrationale Nenner ein Teiler von $(2\mu)!\,\gamma_1^{\mu-1}$ ist. γ_1 ist hier die gleiche Größe wie die in den Hilfssätzen 1 und 2 genannte. Für $\mu = \mu_j = 1$ ist $\beta_{l\{\mu\}} = e_{lj}$, und für $\mu = 2$ erhält man $\beta_{l\{\mu\}} = 0$ im Falle $\mathrm{Max}\,(\mu_j) = 1$ und $\beta_{l\{\mu\}} + \alpha_{l,\mu_j} = 0$ im Falle $\mu_j = 2$. Nach Hilfssatz 2 c) ist die gemachte Annahme über $\beta_{l\{\mu\}}$ damit für $\mu = 1$ und $\mu = 2$ erfüllt. Unter der Annahme über $\beta_{l\{\mu\}}$ und Benutzung von Hilfssatz 2c) erkennt man, daß sich jeder der Ausdrücke (14) mit $\mu < \nu$ darstellen läßt als Quotient ganzer Zahlen mit einem ganzrationalen Nenner, der ein Teiler von

$$(2\mu)!\,\gamma_1^{\mu-1}\prod_{l=1}^{p}\prod_{j=1}^{i(l)} \nu_{lj}\gamma_1^{\nu_{lj}-1} \tag{16}$$

ist. Der Exponent von γ_1 in (16) lautet

$$\mu - 1 + \sum_{l=1}^{p}\sum_{j=1}^{i(l)} \nu_{lj} - \sum_{l=1}^{p} i(l) = \mu - 1 + \nu - \mu = \nu - 1. \tag{17}$$

Mit ϱ_h $(h = 1, \ldots, H)$ seien diejenigen ν_{lj} aus (16) bezeichnet, für die $\nu_{lj} > 1$ gilt. Dann ist $2(\varrho_h - 1) \geqq \varrho_h$ und nach (15 a, b)

$$2\nu - 2\mu = 2\sum_{h=1}^{p}\sum_{j=1}^{i(l)} (\nu_{lj} - 1) = 2\sum_{h=1}^{H} (\varrho_h - 1) \geqq \sum_{h=1}^{H} \varrho_h.$$

Daraus folgt aber:

$$\frac{(2\nu)!}{(2\mu)!\left(\sum_{h=1}^{H} \varrho_h\right)!} \quad \text{ist ganzzahlig,}$$

und wegen

$$\prod_{h=1}^{H} \varrho_h = \prod_{l=1}^{p}\prod_{j=1}^{i(l)} \nu_{lj}$$

erst recht:

$$\frac{(2\nu)!}{(2\mu)!\prod_{l=1}^{p}\prod_{j=1}^{i(l)} \nu_{lj}} \quad \text{ist ganzzahlig.} \tag{18}$$

Nach (17) und (18) ist also die Zahl $(2\nu)!\,\gamma_1^{\nu-1}$ gemeinschaftliches Vielfaches der sämtlichen Zahlen (16). Es gilt damit die über $\beta_{l\{\mu\}}$ mit $\mu < \nu$ gemachte Annahme auch für $\mu = \nu$. Somit ist der Beweis geführt für den

Hilfssatz 3. *Das System* (11) *gestattet in einem geeigneten Bereich die Umkehrung* (12), *und die in* (12) *auftretenden Koeffizienten* $\beta_{l\{\mu\}}$ *haben die folgenden Eigenschaften:*

a) $\beta_{l\{\mu\}}$ *sind algebraische Zahlen aus* $\mathcal{K}_1$;

b) $\overline{|\beta_{l\{\mu\}}|} < e^{O(\mu)}$;

c) *$\beta_{l\{\mu\}}$ läßt sich als Quotient zweier ganzen Zahlen so darstellen, daß der ganzrationale Nenner ein Teiler von $(2\mu)!\,\gamma_1^{\mu-1}$ ist; γ_1 ist dabei von l und $\{\mu\}$ unabhängig.*

Nach den bisherigen Überlegungen bieten die folgenden Schritte zur gewünschten Potenzreihenentwicklung keine Schwierigkeiten mehr. Die Variablen $\mathfrak{V}$ in (12) ersetze man mittels (6) durch $\mathfrak{U}$. Dadurch erhält man eine zu (12) analoge Entwicklung

$$s_l = \sum_{\substack{\{\mu\}\geqq\mathfrak{n}\\ \mu\geqq 1}} \gamma_{l\{\mu\}} U_1^{\mu_1} \cdots U_p^{\mu_p} \qquad (l = 1, \ldots, p), \tag{19}$$

und für die Koeffizienten $\gamma_{l\{\mu\}}$ gelten offenbar die nachstehenden Feststellungen:

Hilfssatz 4. *Die drei Aussagen* a), b), c) *in Hilfssatz* 3 *über die Größen $\beta_{l\{\mu\}}$ haben ebenfalls Gültigkeit, wenn $\beta_{l\{\mu\}}$ durch $\gamma_{l\{\mu\}}$ und die Konstante γ_1 durch eine andere passende ganze Zahl γ_2 ersetzt werden.*

Damit die Umkehrung der Relationen (2), die im Kleinen durch (19) geliefert wird, auch im Großen eindeutig und sinnvoll ist, bildet man bekanntlich symmetrische und rationale Funktionen in $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Eine solche sei $S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Die Koeffizienten von $S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ seien algebraisch und mögen mit $\mathcal{K}_1$ zusammen den Körper $\mathcal{K}_2$ bestimmen. $S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ läßt sich als Quotient zweier Polynome schreiben; das Nennerpolynom habe für $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ einen Wert $S_\mathfrak{c} \neq 0$. Es ist also

$$S(\mathfrak{z} + \mathfrak{c}, y(\mathfrak{z} + \mathfrak{c})) = \frac{S_1(\mathfrak{z})}{S_\mathfrak{c} + S_2(\mathfrak{z})} \tag{20}$$

mit $S_2(\mathfrak{n}) = 0$. Den Nenner der rechten Seite von (20) entwickle man in eine Reihe nach Potenzen von S_2 und gewinne daraus eine Potenzreihe für S nach Potenzen von $\mathfrak{z}$:

$$S(\mathfrak{z} + \mathfrak{c}, y(\mathfrak{z} + \mathfrak{c})) = \sum_{\{\nu\}\geqq\mathfrak{n}} \delta_{\{\nu\}} s_1^{\nu_1} \cdots s_p^{\nu_p}. \tag{21}$$

Die Koeffizienten $\delta_{\{\nu\}}$ sind algebraische Zahlen aus $\mathcal{K}_2$. Sie haben, schon aus Konvergenzgründen, die Größenordnung

$$|\,\delta_{\{\nu\}}\,| < e^{O(\nu)},$$

die ebenfalls für ihre Konjugierten gilt. Schließlich lassen sie sich, wiederum nach dem Eisensteinschen Satz, als Quotienten ganzer Zahlen mit einem ganzrationalen Nenner γ_3^ν darstellen.

Nun setze man in (31) für $\mathfrak{z}$ die Entwicklung (19) nach Potenzen von $\mathfrak{U}$ ein. Die Entwicklung (19) gilt nur für kleine Werte der Absolutbeträge von $\mathfrak{U}$ und damit auch die sich ergebende Darstellung, wobei $A(\mathfrak{U})$ für $S(\mathfrak{z} + \mathfrak{c}, y(\mathfrak{z} + \mathfrak{c}))$ geschrieben ist:

$$A(\mathfrak{U}) = \sum_{\{\mu\}\geqq\mathfrak{n}} a_{\{\mu\}} U_1^{\mu_1} \cdots U_p^{\mu_p}. \tag{22}$$

Ich erlaube mir, die mittels Hilfssatz 4 und den Angaben über die Koeffizienten $\delta_{\{\nu\}}$ sofort zu verifizierenden folgenden Tatsachen ohne nähere Begründung mitzuteilen.

Hilfssatz 5. *Die A-Funktion $A(\mathfrak{U})$, die durch Umkehrung des Integralsystems* (2) *mit geeigneten unteren Grenzen entstanden ist, gestattet in der Nähe des Nullpunktes eine Entwicklung* (22) *nach Potenzen von $\mathfrak{U}$. Die in ihr auftretenden Koeffizienten $a_{\{\mu\}}$ haben folgende Eigenschaften:*

a) *$a_{\{\mu\}}$ sind Zahlen eines algebraischen Körpers $\mathcal{K}_2$, der durch die Koeffizienten von $F(x, y)$, die Werte $\mathfrak{c}$ und $y(\mathfrak{c})$, die Koeffizienten von $\mathfrak{R}(x, y)$ und $S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ bestimmt ist.*

b) *Es ist $\overline{|a_{\{\mu\}}|} < e^{O(\mu)}$.*

c) *$a_{\{\mu\}}$ erlaubt eine Darstellung als Quotient ganzer Zahlen mit einem ganzrationalen Nenner, der ein Teiler der Zahl $(2\mu)!\,\gamma_4^\mu$ ist; dabei ist γ_4 ganzrational und unabhängig von den Exponenten $\{\mu\}$.*

Im folgenden wird von den bisherigen Hilfssätzen nur dieser Hilfssatz 5 benutzt werden, und wir können nach diesen Vorbereitungen in § 3 direkt an den Beweis von Satz I herangehen. Anders liegt die Sache aber bei Satz II; hierzu sind noch einige Bemerkungen notwendig.

Satz II handelt von den Perioden Abelscher Integrale erster oder zweiter Gattung. Es soll daher jetzt für solche Abelschen Integrale eine geeignete Darstellung gefunden werden.

Es sei

$$J(x, y) = \int_{c}^{(x,y)} R(x, y)dx$$

ein Abelsches Integral erster oder zweiter Gattung. x und y seien durch eine algebraische Beziehung $F(x, y) = 0$ vom Geschlechte p miteinander verknüpft. Die sämtlichen Koeffizienten von $F(x, y)$ und der rationalen Funktion $R(x, y)$ seien algebraische Zahlen. Dies sind die Voraussetzungen für Satz II.

Man bilde nun

$$J = \sum_{k=1}^{p} J(x_k, y_k) = \sum_{k=1}^{p} \int_{c_k}^{(x_k, y_k)} R(x, y)dx \tag{23}$$

und betrachte daneben p Summen von linear unabhängigen Integralen erster Gattung, deren sämtliche Integranden algebraische Zahlkoeffizienten haben mögen:

$$\mathfrak{U} = \sum_{k=1}^{p} \int_{c_k}^{(x_k, y_k)} \mathfrak{R}(x, y)dx; \tag{24}$$

die unteren Grenzen $\mathfrak{c}$ seien die gleichen Werte wie in (23). Die Gleichungen (23) und (24) lassen sich auch in folgender Form schreiben:

$$dJ = \sum_{k=1}^{p} R(x_k, y_k)dx_k \tag{25}$$

und

$$d\mathfrak{U} = \sum_{k=1}^{p} \mathfrak{R}(x_k, y_k)dx_k. \tag{26}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\mathfrak{R}(x, y)$ läßt sich dx_k aus (26) berechnen, und man erhält

$$dx_k = \sum_{i=1}^{p} G_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})dU_i,$$

wobei $G_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eine rationale Funktion der sämtlichen Variablen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ist mit der wichtigen Eigenschaft, daß G_{ik} durch Vertauschung von (x_k, y_k) mit (x_l, y_l) in G_{il} übergeht. Setzt man den Ausdruck für dx_k in (25) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} dJ &= \sum_{k=1}^{p} R(x_k, y_k) \sum_{i=1}^{p} G_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})dU_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{p} R(x_k, y_k)\, G_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \right) dU_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} H_i(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dU_i. \end{aligned} \tag{27}$$

Die rationale Funktion $H_i(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ist aber nach der Bemerkung über G_{ik} eine symmetrische Funktion der Paare $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Die Koeffizienten von $H_i(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ sind algebraische Zahlen aus einem Körper, der durch die sämtlichen Koeffizienten von $F(x, y)$, $R(x, y)$, $\mathfrak{R}(x, y)$ erzeugt wird. Damit ist aber $H_i(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ als Funktion von $\mathfrak{U}$ eine A-Funktion — wir nennen

sie $A_i(\mathfrak{U})$ —, und für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $A_i(\mathfrak{U})$ ist Hilfssatz 5 zuständig. Die Gleichung (27) kann also in der Form

$$J = \int_{(C)} \sum_{i=1}^{p} A_i(\mathfrak{U})\, dU_i = B(\mathfrak{U}) \tag{28}$$

geschrieben werden; dabei ist unter Berücksichtigung von (23) (C) eine Kurve im p-dimensionalen Raume mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{n}$ und dem Endpunkt $\mathfrak{U}$. Die Funktion $B(\mathfrak{U})$ ist dabei, da $J(x, y)$ als Integral erster oder zweiter Gattung angenommen war, eine meromorphe, aber nun nicht mehr rein periodische Funktion ihrer Variablen $\mathfrak{U}$. Bei Integration über den l-ten Querschnitt $(l = 1, \ldots, 2p)$ einer kanonischen Zerschneidung der Riemannschen Fläche von $F(x, y) = 0$ mögen die Integrale (24) die Werte ω_{il} und das Integral (23) entsprechend den Wert η_l annehmen. Dann gelten die Funktionalgleichungen

$$B(U_1 + \omega_{1l}, \ldots, U_p + \omega_{pl}) = B(\mathfrak{U}) + \eta_l \qquad (l = 1, \ldots, 2p). \tag{29}$$

Wie man aus (29) erkennt, sind sämtliche Ableitungen der Funktion $B(\mathfrak{U})$ wieder $2p$-fach periodische Funktionen. Für die Koeffizienten der Potenzreihendarstellung von $B(\mathfrak{U})$ an der Stelle $\mathfrak{U} = \mathfrak{n}$ ergibt sich aus Hilfssatz 5 wegen (28) sofort

Hilfssatz 6. *Jedes Abelsche Integral* $J = \sum_{k=1}^{p} \int_{c_k}^{(x_k, y_k)} R(x, y)dx$ *erster oder zweiter Gattung mit geeigneten unteren Grenzen gestattet als Funktion geeigneter Integrale erster Gattung* $\mathfrak{U}$ *in der Nähe der Stelle* $\mathfrak{U} = \mathfrak{n}$ *eine Potenzreihenentwicklung*

$$J = B(\mathfrak{U}) = \sum_{\{\mu\} \geqq \mathfrak{n}} b_{\{\mu\}} \mathfrak{U}_1^{\mu_1} \cdots U_p^{\mu_p}. \tag{30}$$

Für die Koeffizienten $b_{\{\mu\}}$ *aus* (30) *gilt dabei*

a) $b_{\{\mu\}}$ *sind Zahlen eines algebraischen Körpers* $\mathfrak{K}_3$, *der durch die Koeffizienten von* $F(x, y)$, $R(x, y)$, $\Re(x, y)$ *und die Größen* $\mathfrak{c}$ *und* $y(\mathfrak{c})$ *bestimmt ist*;

b) *es ist* $\overline{|b_{\{\mu\}}|} < e^{O(\mu)}$;

c) $b_{\{\mu\}}$ *läßt sich als Quotient ganzer Zahlen mit einem ganzrationalen Nenner schreiben, der ein Teiler von* $(2\mu)!\, \gamma_5^{\mu}$ *ist mit einem von* $\{\mu\}$ *unabhängigen ganzrationalen* γ_5.

Im elliptischen Falle entspricht unserer Funktion $B(\mathfrak{U})$ in Weierstraßscher Darstellung der Ausdruck $au + b\zeta(u)$, wobei a und b Konstanten und $\zeta(u)$ die Weierstraßsche ζ-Funktion bedeuten.

§ 3. Beweise.

Nach Bemerkung 1 sind nur die Sätze I und II zu beweisen. Zunächst sollen die zu untersuchenden Abelschen Funktionen in solche mit normierten Periodensystemen übergeführt werden. Die Funktion $A(\mathfrak{U})$ habe das Periodensystem

$$((\omega_{kl})) \qquad \begin{pmatrix} l = 1, \ldots, 2p \\ k = 1, \ldots, p \end{pmatrix}, \tag{31}$$

und die Determinante

$$D(\omega_{kl}) \qquad (k, l = 1, \ldots, p)$$

sei von Null verschieden.

Durch Einsetzen der linearen homogenen Ausdrücke

$$U_k = \sum_{l=1}^{p} \omega_{kl} z_l \qquad (k = 1, \ldots, p) \tag{32}$$

in $A(\mathfrak{U})$ erhält man eine Abelsche Funktion

$$A(\mathfrak{U}) = \Phi(\mathfrak{z}). \tag{33}$$

Ob aber $\Phi(\mathfrak{z})$ auch eine A-Funktion sein wird, ist nicht bekannt, da über die Algebraizität der Größen ω_{kl} keine Aussagen vorliegen. Durch Umkehrung des Systems (32) ergibt sich

$$z_l = \sum_{k=1}^{p} \Omega_{kl} U_k \qquad (l = 1, \ldots, p); \tag{34}$$

dabei ist $((\Omega_{kl}))$ die zu $((\omega_{kl}))$ reziproke Matrix.

Satz I enthält eine Aussage über $p + 1$ A-Funktionen $A_1(\mathfrak{U}), \ldots, A_{p+1}(\mathfrak{U})$, die ein System von p Perioden, etwa die p ersten Spalten der Matrix (31) gemeinsam haben. Man bilde nun eine Summe von Potenzprodukten dieser A-Funktionen mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $C_{\nu_1, \ldots, \nu_{p+1}}$

$$L(\mathfrak{U}) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_{p+1}=0}^{n} C_{(\nu)} A_1^{\nu_1}(\mathfrak{U}) \cdots A_{p+1}^{\nu_{p+1}}(\mathfrak{U}). \tag{35}$$

Es sei hier zur Abkürzung $C_{(\nu)}$ für $C_{\nu_1, \ldots, \nu_{p+1}}$ geschrieben. Die Funktion $L(\mathfrak{U})$ und die sämtlichen partiellen Ableitungen von $L(\mathfrak{U})$ bis zur Gesamtordnung r sollen an der Stelle $\mathfrak{U} = \mathfrak{u}$ verschwinden. Bezeichnet man $\left.\dfrac{\partial^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_p} L(\mathfrak{U})}{\partial U_1^{\varrho_1} \cdots \partial U_p^{\varrho_p}}\right|_{\mathfrak{U}=\mathfrak{u}}$ kurz mit $L(\mathfrak{u})^{\{\varrho\}}$, so lauten also die Forderungen

$$L(\mathfrak{u})^{\{\varrho\}} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho_1 + \cdots + \varrho_p = \varrho \leqq r. \tag{36}$$

r wird so gewählt werden, daß diese Bedingungen (36) erfüllbar sind. Jede der Forderungen (36) bedeutet für die $C_{(\nu)}$ eine lineare homogene Gleichung mit Koeffizienten $\chi_{\nu_1, \ldots, \nu_{p+1}; \varrho_1, \ldots, \varrho_p}$, abkürzend $\chi_{(\nu, \varrho)}$ genannt, die Produkte von Zahlen $a_{\{\mu\}}$ (siehe (22)) sind, etwa

$$\sum_{\nu_1, \ldots, \nu_{p+1}=0}^{n} \chi_{(\nu, \varrho)} C_{(\nu)} = 0 \qquad (0 \leqq \varrho \leqq r). \tag{37}$$

Die Anzahl dieser lineraren Gleichungen ist als Zahl der Gitterpunkte in einer p-dimensionalen Ecke mit der Begrenzung $\varrho_1 + \cdots + \varrho_p \leqq r$ gleich $\binom{r+p}{p}$. Es sind also $(n+1)^{p+1}$ Unbekannte zu bestimmen, die $\binom{r+p}{p}$ linearen Gleichungen genügen.

Es existiert gewiß eine positive, nur von p abhängige Zahl γ_6 derart, daß aus

$$r = \gamma_6 \left[n^{\frac{p+1}{p}} \right] \tag{38}$$

folgt

$$2\binom{r+p}{p} < (n+1)^{p+1}. \tag{39}$$

Zur näheren Bestimmung der Koeffizienten $\chi_{(\nu, \varrho)}$ in den Gleichungen (37) für die $C_{(\nu)}$ wende man nun Hilfssatz 5 an: Man erkennt ohne Schwierigkeit, daß die Größen $\chi_{(\nu, \varrho)}$ erstens algebraische Zahlen sind aus einem Körper $\mathcal{K}_4$, der durch die A-Funktionen $A_1(\mathfrak{U}), \ldots, A_{p+1}(\mathfrak{U})$ bestimmt ist; daß zweitens $\overline{|\chi_{(\nu, \varrho)}|} < r!\, e^{O(r)}$ gilt, und daß sich drittens jedes $\chi_{(\nu, \varrho)}$ als Quotient ganzer Zahlen mit einem ganzrationalen Nenner darstellen läßt, der ein Teiler von $(2r)!\, \gamma_7^r$ mit einer geeigneten, von r unabhängigen natürlichen Zahl γ_7 ist. Man multipliziere die sämtlichen Gleichungen (37) mit $(2r)!\, \gamma_7^r$. Sie mögen dadurch in

$$\sum_{\nu_1, \ldots, \nu_{p+1}=0}^{n} \Psi_{(\nu, \varrho)} C_{(\nu)} = 0 \qquad (\varrho \leqq r) \tag{40}$$

übergehen mit $\Psi_{(\nu,\varrho)} = (2r)!\ \gamma_7^r \chi_{(\nu,\varrho)}$. Dann sind $\Psi_{(\nu,\varrho)}$ ganzalgebraische Zahlen aus $\mathcal{K}_4$, und es ist

$$(41) \qquad \overline{|\Psi_{(\nu,\varrho)}|} < r^{3r} e^{O(r)}.$$

Aus der Gültigkeit von (39) und (41) folgt die Lösbarkeit der Gleichungen (40) in nicht sämtlich verschwindenden, in $\mathcal{K}_4$ ganzalgebraischen Zahlen $C_{(\nu)}$, die der Bedingung

$$(42) \qquad \overline{|C_{(\nu)}|} < r^{3r} e^{O(r)}$$

genügen [5]). Damit sind Koeffizienten $C_{(\nu)}$ zu (35), die die Gleichungen (36) mit der Bedingung (38) befriedigen, gefunden.

Führt man in (35) für $\mathfrak{U}$ die Unbekannten $\mathfrak{z}$, wie in (32) angegeben, ein, und setzt man $L(\mathfrak{U}) = \Lambda(\mathfrak{z})$, so wird aus (35) nach (33)

$$(43) \qquad \Lambda(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_{p+1}=0}^{n} C_{(\nu)} \Phi_1^{\nu_1}(\mathfrak{z}) \cdots \Phi_{p+1}^{\nu_{p+1}}(\mathfrak{z}).$$

Wegen (34) folgt aus (36), daß auch die sämtlichen partiellen Ableitungen

$$(44) \qquad \Lambda(\mathfrak{n})^{\{\varrho\}} = 0 \qquad (0 \leqq \varrho \leqq r)$$

sind.

Da die Funktionen $A_1(\mathfrak{U}), \ldots, A_{p+1}(\mathfrak{U})$ nach Voraussetzung die ersten p Spalten der Matrix (31) zu Perioden haben, so auch die nach (35) gebildete Funktion $L(\mathfrak{U})$. Nach (32) hat dann $\Lambda(\mathfrak{z})$ die Spalten einer p-reihigen Einheitsmatrix zu Perioden, d. h.

$$\Lambda(z_1 + e_{1k}, \ldots, z_p + e_{pk}) = \Lambda(\mathfrak{z}) \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

und daraus folgt wieder

$$(45) \qquad \Lambda(\mathfrak{z}) = \Lambda(\mathfrak{z} + \mathfrak{g}),$$

wobei $g_1, \ldots, g_p$ irgendwelche ganzrationale Zahlen sind. Aus (44) und (45) ergibt sich dann

$$(46) \qquad \Lambda(\mathfrak{g})^{\{\varrho\}} = 0 \qquad (0 \leqq \varrho \leqq r).$$

Bekanntlich ist jede $2p$-fach periodische Funktion als Quotient geeigneter Θ-Funktionen darstellbar. Die Θ-Funktionen sind ganze Funktionen. Mithin ist das Produkt jeder der Funktionen $\Phi_k(\mathfrak{z})$ $(k = 1, \ldots, p+1)$ mit einer geeigneten Θ-Funktion endlicher Ordnung, sie sei $\Theta(\mathfrak{z})$ genannt, ganz. Nach (43) ist dann auch

$$\Lambda(\mathfrak{z})\,\Theta(z)^{n(p+1)} = \Lambda(\mathfrak{z})\,P(\mathfrak{z})$$

eine ganze Funktion der sämtlichen Variablen $\mathfrak{z}$.

Man nehme nun an, es sei (46) sogar erfüllt für alle $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$ mit $\varrho \leqq \sigma$, und σ sei eine ganze Zahl $\geqq r$. Dann behaupte ich, es gilt (46) auch für alle $\{\varrho\}$ mit $\varrho_1 + \cdots + \varrho_p = \sigma + 1$. Man nehme zum Beweis ein festes System $\{\varrho\} = \{\sigma\}$ mit der Summe $\sigma_1 + \cdots + \sigma_p = \sigma$, bezeichne mit $Q(\mathfrak{z})$ das Produkt

$$(47) \qquad Q(\mathfrak{z}) = \prod_{k=1}^{p} \prod_{g_k=1}^{m} (z_k - g_k)^{\sigma_k+1},$$

und wähle

$$(48) \qquad m = [\log \sigma].$$

Durch die Kreise K_l

$$|z_l| \leqq m^2$$

---

[5]) Siehe z. B. Hilfssatz I (S. 67) der Arbeit: Th. Schneider, Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I, Journal für die reine und angewandte Mathematik **172** (1934), S. 65—69.

werde ein Kreiszylinderbereich Z begrenzt. Die Ränder von K_l werden T_l genannt. Bezeichnet man abkürzend $\left.\frac{\partial^{\sigma_1+\cdots+\sigma_p+1}\Lambda(\mathfrak{z})}{\partial z_1^{\sigma_1+1}\cdots\partial z_p^{\sigma_p}}\right|_{\mathfrak{z}=\mathfrak{g}}$ mit $\Lambda^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{g})$, so folgt aus (46) nach dem Cauchyschen Integralsatze

$$\left(\frac{\Lambda(\mathfrak{n})\,P(\mathfrak{n})}{Q(\mathfrak{n})}\right)^{\{\sigma+1\}} = \frac{\Lambda^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{n})\,P(\mathfrak{n})}{Q(\mathfrak{n})}$$

$$= \frac{(\sigma_1+1)!\,\sigma_2!\cdots\sigma_p!}{(2\pi i)^p}\int_{\mathsf{T}_1}\frac{dz_1}{z_1^{\sigma_1+2}}\int_{\mathsf{T}_2}\frac{dz_2}{z_2^{\sigma_2+1}}\cdots\int_{\mathsf{T}_p}\frac{dz_p}{z_p^{\sigma_p+1}}\cdot\frac{\Lambda(\mathfrak{z})\,P(\mathfrak{z})}{Q(\mathfrak{z})}. \tag{49}$$

Aus Gleichung (49) schätze man $\Lambda^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{n})$ ab. Es ist unter Benutzung von (42) und unter Berücksichtigung der Darstellung von $\Phi_k(\mathfrak{z})$ als Quotient von Produkten von Θ-Funktionen

$$\operatorname*{Max}_{\mathfrak{z}\text{ auf }Z}|\,\Lambda(\mathfrak{z})\,P(\mathfrak{z})\,| < r^{3r}e^{O(r)}(n+1)^{p+1}\cdot\operatorname*{Max}_{\mathfrak{z}\text{ auf }Z}|\,\Phi_k(\mathfrak{z})\,\Theta(\mathfrak{z})\,|^{n(p+1)} < r^{3r}e^{O(r)}\operatorname*{Max}_{\mathfrak{z}\text{ auf }Z}|\,\Theta_1(\mathfrak{z})\,|^{n(p+1)}.$$

Wegen

$$\operatorname*{Max}_{\mathfrak{z}\text{ auf }Z}|\,\Theta(\mathfrak{z})\,| < e^{O(m^4)} < e^{O(\log\sigma)^4}$$

und (38) ist

$$\operatorname*{Max}_{\mathfrak{z}\text{ auf }Z}|\,\Lambda(\mathfrak{z})\,P(\mathfrak{z})\,| < r^{3r}e^{O(r)}e^{n(p+1)O(\log\sigma)^4} < e^{O(\sigma\log\sigma)}. \tag{50}$$

Für hinreichend großes n erhält man

$$\operatorname*{Min}_{\mathfrak{z}\text{ auf }Z}|\,z_l-m\,| > \frac{m^2}{2},$$

also dann mittels (48)

$$\operatorname*{Min}_{\mathfrak{z}\text{ auf }Z}|\,Q(\mathfrak{z})\,| > \left(\frac{m^2}{2}\right)^{m(\sigma+p)} > m^{2m(\sigma+p)}e^{-\gamma_8\sigma\log\sigma} \tag{51}$$

mit $\gamma_8 > 0$. Durch (50) und (51) ergibt sich aus (49)

$$\left|\frac{\Lambda(\mathfrak{n})^{\{\sigma+1\}}P(\mathfrak{n})}{Q(\mathfrak{n})}\right| < m^{-2m(\sigma+p)}e^{O(\sigma\log\sigma)}.$$

Es sollen die Größen $\mathfrak{c}$ nun noch eine letzte Bedingung erfüllen: sie seien derart gewählt, daß $\Theta(\mathfrak{z})$ und damit auch $P(\mathfrak{z})$ an der Stelle $\mathfrak{z}=\mathfrak{n}$ von Null verschieden ist. Dann ist

$$|\,P(\mathfrak{n})\,| > e^{-\gamma_9 n(p+1)} > e^{-\gamma_{10}\sigma};$$

und es gilt außerdem

$$|\,Q(\mathfrak{n})\,| < m^{m(\sigma+p)}.$$

Damit gewinnt man die wichtige Abschätzung

$$|\,\Lambda^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{n})\,| < m^{-m(\sigma+p)}e^{O(\sigma\log\sigma)} < e^{-\gamma_{11}\sigma\log\sigma\log\log\sigma} \tag{52}$$

mit $\gamma_{11} > 0$.

Diese Abschätzung gilt für alle $\sigma_1,\ldots,\sigma_p$ mit der Summe σ. $\Lambda^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{z})$ ist dabei aus $\Lambda^{\{\sigma\}}(\mathfrak{z})$ durch einmalige Differentiation nach z_1 hervorgegangen. Die gleiche Überlegung, die zu (52) führte, läßt sich aber ebenso mit den einmaligen Ableitungen von $\Lambda^{\{\sigma\}}(\mathfrak{z})$ nach $z_2, z_3,\ldots,z_p$ anstellen. Auch diese Ausdrücke seien mit $\Lambda^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{z})$ bezeichnet. Dann gilt also die Ungleichung (52) für alle möglichen Kombinationen $\varrho_1,\ldots,\varrho_p$ mit der Summe $\varrho_1+\cdots+\varrho_p=\sigma+1$.

Aus (32) folgt, daß sich $L^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{U})$ darstellen läßt als Summe von Ausdrücken $\Lambda^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{z})$ mit Zahlkoeffizienten, die Summen von Potenzprodukten der ω_{kl} sind. Aus dieser Beziehung und aus (52) folgt

$$|L^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{u})| < e^{-\gamma_{12}\sigma\log\sigma\log\log\sigma}. \tag{53}$$

$L^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{u})$ ist eine algebraische Zahl aus $\mathcal{K}_4$. Nach Hilfssatz 5 erkennt man analog den Überlegungen, die zur Bestimmung der $C_{(\nu)}$ führten, daß $L^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{u})\cdot(2\sigma+2)!\,\gamma_7^{\sigma+1}$ ganz algebraisch ist. Die Abschätzung der Konjugierten ergibt nach Hilfssatz 5

$$\left|\overline{L^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{u})}\right| < (\sigma+1)!\,e^{O(\sigma)r^3r} < e^{O(\sigma\log\sigma)}. \tag{54}$$

Damit folgt aus (53) und (54) als Abschätzung für die Norm

$$|N(L^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{u})(2\sigma+2)!\,\gamma_7^{\sigma+1})| < e^{O(2\sigma\log 2\sigma)-\gamma_{12}\sigma\log\sigma\log\log\sigma} < e^{-\gamma_{13}\sigma\log\sigma\log\log\sigma} < 1$$

für hinreichend großes r und mithin für hinreichend großes n. Also ist $L^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{u})=0$. Dies gilt für jedes System $\varrho_1,\ldots,\varrho_p$ mit $\varrho_1+\cdots+\varrho_p=\sigma+1$. Es folgt dann nach (34), daß auch die sämtlichen Ableitungen $\Lambda^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{u})=0$ sind. Unter Hinzunahme von (44) folgt daraus durch vollständige Induktion, daß die sämtlichen partiellen Ableitungen jeder Ordnung von der Funktion $\Lambda(\mathfrak{z})$ und mithin auch von $L(\mathfrak{U})$ verschwinden. Damit muß aber $L(\mathfrak{U})$ identisch Null sein oder mit anderen Worten, die A-Funktionen $A_1(\mathfrak{U}),\ldots,A_{p+1}(\mathfrak{U})$ sind algebraisch abhängig.

Der Beweis von Satz II verläuft ganz analog demjenigen von Satz I. Ich will mich deswegen darauf beschränken, nur diejenigen Stellen hervorzuheben, an denen er sich von dem vorhergegangenen unterscheidet. Für Ausdrücke, die sich in beiden Beweisen einander entsprechen, verwende ich dabei gleiche Bezeichnungen.

Der Beweis wird indirekt geführt. Es sei wiederum die Determinante

$$D(\omega_{kl}) \neq 0 \qquad (k,l=1,\ldots,p).$$

Ferner sei $B(\mathfrak{U})$ ein Integral erster oder zweiter Gattung, über das Hilfssatz 6 Auskunft gibt. Seine den Periodizitätsmoduln ω_{il} der Integrale U_i entsprechenden Perioden seien η_l, und es gilt das System (29). $A_1(\mathfrak{U}),\ldots,A_p(\mathfrak{U})$ seien voneinander algebraisch unabhängige A-Funktionen mit dem Periodensystem ω_{kl}.

Die Funktion

$$L(\mathfrak{U}) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_{p+1}=0}^{n} C_{(\nu)}A_1^{\nu_1}(\mathfrak{U})\cdots A_p^{\nu_p}(\mathfrak{U})\,B^{\nu_{p+1}}(\mathfrak{U}) \tag{55}$$

ist nun im allgemeinen nicht mehr periodisch. Die Koeffizienten $C_{(\nu)}$ seien so bestimmt, daß an allen Stellen

$$\begin{cases} U_k = \sum g_l\omega_{kl} & (k=1,\ldots,p), \\ g_l = 1,\ldots,[\log r] & (l=1,\ldots,p) \end{cases} \tag{56}$$

sowohl $L(\mathfrak{U})$, wie auch dessen sämtliche partielle Ableitungen bis zur Gesamtordnung ϱ für $0 \leqq \varrho_1+\cdots+\varrho_p=\varrho \leqq r$ verschwinden. Die $(n+1)^{p+1}$ Unbekannten bestimmen sich hier aus $\binom{r+p}{p}[\log r]^p$ Gleichungen. Die Ungleichung (39) ist demnach zu ersetzen durch

$$2\binom{r+p}{p}[\log r]^p < (n+1)^{p+1}, \tag{57}$$

die an Stelle von (38) mit

$$r = \gamma_{14}\left[\frac{n^{\frac{p+1}{p}}}{\log n}\right] \tag{58}$$

und geeignetem γ_{14} erfüllt werden kann. Die Bestimmung der Koeffizienten $C_{(\nu)}$, die in dem durch die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklungen von $A_1(\mathfrak{U}), \ldots, A_p(\mathfrak{U})$, $B(\mathfrak{U})$ und durch $\eta_1, \ldots, \eta_p$ erzeugten Körper $\mathcal{K}_5$ ganzalgebraisch sind, verläuft analog der entsprechenden Untersuchung des vorangegangenen Beweises unter Benutzung von Hilfssatz 5, Hilfssatz 6 und (29). Sie liefert bei Anwendung von (57) wieder

$$\overline{|C_{(\nu)}|} < r^{3r}e^{O(r)}. \tag{59}$$

Durch Einführung der Variablen $\mathfrak{z}$ für $\mathfrak{U}$ mittels (32) gehe $B(\mathfrak{U})$ in $\Psi(\mathfrak{z})$ über; dann wird aus (29) die Beziehung

$$\Psi(z_1 + e_{1l}, \ldots, z_p + e_{pl}) = \Psi(\mathfrak{z}) + \eta_l \qquad (l = 1, \ldots, 2p).$$

Aus (55) erhält man durch die Substitution (32)

$$\Lambda(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_{p+1}=0}^{n} C_{(\nu)}\Phi_1^{\nu_1}(\mathfrak{z}) \cdots \Phi_p^{\nu_p}(\mathfrak{z})\Psi^{\nu_{p+1}}(\mathfrak{z}). \tag{60}$$

Wegen (56) folgt, daß die sämtlichen partiellen Ableitungen

$$\Lambda(\mathfrak{z})^{\{\varrho\}} = 0 \qquad (0 \leqq \varrho \leqq r) \tag{61}$$

sind an allen Gitterwerten des $\mathfrak{z}$-Raumes, für die $1 \leqq z_l \leqq [\log r]$ gilt. Weiter kann man aus (28) leicht zeigen, daß es eine geeignete Θ-Funktion endlicher Ordnung $\Theta(\mathfrak{z})$ gibt, so daß $\Psi(\mathfrak{z})\Theta(\mathfrak{z})$ eine ganze transzendente Funktion ist. Also bilde man wieder $P(\mathfrak{z})$ als Produkt von $p + 1$ geeigneten Θ-Funktionen, so daß $\Lambda(\mathfrak{z})P(\mathfrak{z})$ eine ganze Funktion darstellt.

Es wird nun vorausgesetzt, (61) gelte für alle ϱ_i mit $0 \leqq \sum_{i=1}^{p} \varrho_i \leqq \sigma$ an allen Gitterwerten $1 \leqq z_l \leqq [\log \sigma]$ $(l = 1, \ldots, p)$ mit $\sigma \geqq r$; außerdem gelte (61) noch für sämtliche ϱ_i mit $0 \leqq \sum_{i=1}^{p} \varrho_i \leqq \tau_\mu \leqq \sigma$ an jeder Gitterstelle $\mathfrak{z}^{(\mu)}$ $(\mu = 1, \ldots, M \geqq 0)$, deren Koordinaten $z_l^{(\mu)}$ den Bedingungen $1 \leqq z_l^{(\mu)} \leqq [\log \sigma] + 1$ genügen, und die von den erstgenannten Stellen verschieden ist.

Es wird behauptet, unter dieser Annahme gilt (61) an den genannten Stellen auch mit einem um 1 vergrößerten σ bzw. τ_μ, und ferner verschwindet $\Lambda(\mathfrak{z})$ sogar für alle Gitterpunkte mit $1 \leqq z_l \leqq [\log \sigma] + 2$.

Mit der Abkürzung $m = [\log \sigma]$ habe $Q(\mathfrak{z})$ nunmehr die Bedeutung

$$Q(\mathfrak{z}) = \prod_{k=1}^{p}\left\{\prod_{g_k=1}^{m}(z_k - g_k)^{\sigma_k+1}\prod_{\mu=1}^{M}(z_k - z_k^{(\mu)})^{\tau_{\mu k}+1}\right\} \tag{62}$$

bei geeigneten Werten von σ_k und $\tau_{\mu k}$ mit $\sum_{k=1}^{p}\sigma_k = \sigma$ und $\sum_{k=1}^{p}\tau_{\mu k} = \tau_\mu$. Die Kreise K_l

$$|z_l| < m^2,$$

deren Ränder T_l seien, bilden den Bereich Z.

Der letzte Teil der Behauptung, der besagt, daß $\Lambda(\mathfrak{z})$ an allen Gitterpunkten verschwindet, für die $1 \leqq z_l \leqq m + 2$ gilt, soll zuerst behandelt werden. Es sei $\mathfrak{z} = \mathfrak{t}$ ein solcher Gitterpunkt. Dann ist

$$\frac{\Lambda(\mathfrak{t})\,P(\mathfrak{t})}{Q(\mathfrak{t})} = \frac{1}{(2\pi i)^p}\int_{\mathsf{T}_1}\frac{dz_1}{z_1 - t_1}\cdots\int_{\mathsf{T}_p}\frac{dz_p}{z_p - t_p}\cdot\frac{\Lambda(\mathfrak{z})\,P(\mathfrak{z})}{Q(\mathfrak{z})}.$$

Die notwendigen Abschätzungen ergeben: Unter Benutzung von (58) und (59) ist

$$\operatorname*{Max}_{\mathfrak{z}\,\text{auf}\,Z} |\, \Lambda(\mathfrak{z})\, P(\mathfrak{z}) \,| < e^{O(\sigma \log \sigma)};$$

nach (52) ist für hinreichend großes n

$$\operatorname*{Min}_{\mathfrak{z}\,\text{auf}\,Z} |\, Q(\mathfrak{z}) \,| > \left(\frac{m^2}{2}\right)^{m(\sigma+p)+Mp+\sum_{\mu=1}^{M}\tau_\mu}.$$

Schließlich ist bei geeigneter Wahl von c

$$|\, P(\mathfrak{t}) \,| > e^{-\gamma_{15}\sigma}$$

und

$$|\, Q(\mathfrak{t}) \,| < (m+2)^{m(\sigma+p)+Mp+\sum_{\mu=1}^{M}\tau_\mu}.$$

Damit ist für hinreichend großes n

$$|\, \Lambda(\mathfrak{t}) \,| < m^{-m\sigma} e^{O(\sigma \log \sigma)} < e^{-\gamma_{16}\sigma \log \sigma \log\log \sigma}.$$

Unter der bei Satz II gemachten Voraussetzung ist $\Lambda(\mathfrak{t})$ eine algebraische Zahl. Durch Untersuchung der Norm von $\Lambda(\mathfrak{t})$ in der Darstellung (60) gelangt man für hinreichend großes n ohne Schwierigkeit zu dem behaupteten Ergebnis $\Lambda(\mathfrak{t}) = 0$.

Nun steht noch der erste Teil der Behauptung offen. An einer der genannten Stellen, sie sei ebenfalls mit $\mathfrak{t}$ bezeichnet, verschwinden nach Voraussetzung $\Lambda(\mathfrak{t})$ und die Ableitungen davon bis zur Gesamtordnung σ bzw. τ_μ. Dann sollen, so wird behauptet, an dieser Stelle auch alle Ableitungen der Gesamtordnung $\sigma+1$ bzw. $\tau_\mu+1$ gleich Null sein.

Es gelte also (61) für die Stelle $\mathfrak{t}$ etwa mit $0 \leqq \varrho \leqq \sigma$; mit τ_μ an Stelle von σ verläuft die Entwicklung ganz analog, so daß ich mich darauf beschränken darf, den Gang nur für σ anzugeben. Mit Verwendung der bereits eingeführten Bezeichnungen ist dann

$$\left(\frac{\Lambda(\mathfrak{t})\, P(\mathfrak{t})}{Q_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{t})}\right)^{\{\sigma+1\}} = \frac{\Lambda^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{t})\, P(\mathfrak{t})}{Q_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{t})}$$

$$= \frac{(\sigma_1+1)!\,\sigma_2!\cdots\sigma_p!}{(2\pi i)^p} \int_{\mathfrak{T}_1} \frac{dz_1}{(z_1-t_1)^{\sigma_1+2}} \int_{\mathfrak{T}_2} \frac{dz_2}{(z_2-t_2)^{\sigma_2+1}} \cdots \int_{\mathfrak{T}_p} \frac{dz_p}{(z_p-t_p)^{\sigma_p+1}} \cdot \frac{\Lambda(\mathfrak{z})\, P(\mathfrak{z})}{Q_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{z})}.$$

Hierbei geht $Q_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{z})$ aus $Q(z)$ in (62) durch die Bildung

$$Q_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{z}) = \frac{Q(\mathfrak{z})}{\prod_{k=1}^{p} (z_k - t_k)^{\sigma_k+1}}$$

hervor.

Man erhält aus dem angegebenen Cauchyschen Satze auch hier eine Abschätzung für $|\, \Lambda^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{t}) \,|$, die derjenigen von (52) entspricht. Die gleiche Abschätzung ergibt sich auch für $\Lambda^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{t})$, das aus $\Lambda^{\{\sigma\}}(\mathfrak{t})$ durch einmalige Differentiation nach $z_2, z_3, \ldots$ oder z_p hervorgegangen ist. Damit gilt diese Abschätzung für alle möglichen Systeme $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$ mit $\varrho_1 + \cdots + \varrho_p = \sigma+1$. Mittels (32) folgt daraus eine entsprechende Abschätzung für $L^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{U}_{\mathfrak{t}})$ mit $U_{k\mathfrak{t}} = \sum_{l=1}^{p} \omega_{kl} t_l$, und aus der Algebraizität von $L^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{U}_{\mathfrak{t}})$ schließt man auf das Verschwinden dieses Ausdrucks. Nach (34) muß damit auch $\Lambda^{\{\sigma+1\}}(\mathfrak{t}) = 0$ sein für alle $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$ mit $\varrho_1 + \cdots + \varrho_p = \sigma+1$, wie zu zeigen war.

Nun schließt man durch sinngemäße Anwendung dieses Hilfstheorems mittels vollständiger Induktion, daß $\Lambda(\mathfrak{z})$ an allen Gitterpunkten $1 \leqq z_l$ $(l = 1, \ldots, p)$ von

beliebig hoher Ordnung verschwindet; also muß $L(\mathfrak{U})$ identisch Null sein. Die Funktionen $A_1(\mathfrak{U}), \ldots, A_p(\mathfrak{U})$ und $B(\mathfrak{U})$ müssen also voneinander algebraisch abhängig sein, und da $A_1(\mathfrak{U}), \ldots, A_p(\mathfrak{U})$ voneinander algebraisch unabhängig sind, so folgt daraus: $B(\mathfrak{U})$ ist eine $2p$-fach periodische Funktion oder mit anderen Worten: sämtliche Größen η_l $(l = 1, \ldots, 2p)$ sind gleich Null. Dies ist aber unmöglich, und aus diesem Widerspruch folgt Satz II.

Eingegangen 22. Januar 1940.